

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ**

Кафедра економічна кібернетика



Університет

Навчально-методичні

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

**по опорному конспекту лекцій з дисципліни
«Методи оптимального управління в економіці»
для студентів спеціальності 051«Економіка»
денної та заочної форми навчання**

Тернопіль-2017р.

Методичні рекомендації опорного конспекту лекцій з дисципліни «Методи оптимального управління в економіці» для студентів спеціальності 7.030502 «Економічної кібернетики» денної та заочної форми навчання / к.е.н., доцент Н.М. Гарматій – Тернопіль, ТНТУ ім. І. Пулюя, 2017. – 63 с.

У методичних рекомендаціях на основі діючого законодавства та освітньо-професійної програми з підготовки магістрів, розкрито суть лекційних матеріалів з дисципліни «Методи оптимального управління в економіці»; використання літературних джерел для розкриття та обґрунтування досліджуваної проблеми в науковому та економічному аспекті; використання фактичних даних про результати моделювання динамічних процесів; використання економічних методів для дослідження закономірностей динаміки діяльності підприємств у всіх сферах економіки;

Укладачі: Гарматій Н.М., кандидат економічних наук, доцент кафедри економічної кібернетики.

Рецензенти: Рогатинський Роман Михайлович, д.т.н., професор, проректор з наукової роботи

Відповідальний за випуск: Гарматій Наталія Михайлівна, кандидат економічних наук, старший викладач кафедри економічної кібернетики.

Методичні рекомендації розглянуті і затверджені на засіданні кафедри фінансів, обліку і контролю
Протокол № 8 від 24 березня 2017р.

Схвалені на засіданні методичної комісії факультету економіки та підприємницької діяльності
Протокол № від 201 р.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Лекція 1. Оптимізація інвестиційного портфеля комерційної структури методом М.Марковіца.....	5
Лекція 2. ОЦІНКА РИЗИКУ В МОДЕЛІ ШАРПА, та КВАЗІ-ШАРПА....	7
2.2 МОДЕЛЮВАННЯ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЮ В УМОВАХ НЕСТАБІЛЬНОСТІ НА ПРИКЛАДІ МОДЕЛІ КВАЗІ-ШАРПА.....	8
Лекція 3 ОЦІНКА РИЗИКУ В МЕТОДОЛОГІЇ VALUE-AT-RISK.....	11
Лекція 4. ОЦІНКА РИЗИКУ В НЕЧІТКОМУ ПІДХОДІ ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ.....	13
Лекція 5 . ЗАСТОСУВАННЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ У ЛОГІСТИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ ПІДПРИЄМСТВА.....	14
5.1Застосування сучасного програмного забезпечення у вирішенні оптимізації перевезень підприємства.....	35
Лекція 6. МАРКОВСЬКИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС З ДИСКРЕТНИМИ СТАНАМИ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ В СУЧАСНИХ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСАХ.....	39.
Лекція 7. ТЕОРІЯ НЕЧІТКИХ МНОЖИН У МОДЕЛЮВАННІ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ	43
СПИСОК ВИКОРИТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	59

ВСТУП

Методи оптимального управління в економіці є однією із фахових дисциплін підготовки фахівців зі спеціальності "Економіка". Вивчення дисципліни направлене на формування системи теоретичних знань і практичних навичок побудови та аналізу математичних моделей оптимального управління розвитку економічних процесів.

Завданням даного курсу є оволодіння теоретичними знаннями та інструментарієм моделювання динамічних економічних процесів; набуття вмінь постановки і самостійного розв'язання задач аналізу, прогнозування, прийняття рішень та управління ризиком з використанням моделей.

Предметом вивчення курсу є оптимальні методи управління економікою.

Під час вивчення дисципліни студентом мають бути засвоєні основні принципи управлінських процесів у сучасній економіці, та управлінні сучасними компаніями, використовуючи інструментарій економіко-математичного моделювання.

Для опрацювання лекційних матеріалів з даного курсу студент повинен володіти базовими знаннями з дисциплін "Економетрія", "Дослідження операцій", "Математичне програмування", "Системний аналіз", "Прогнозування соціально-економічних процесів", "Моделювання економіки". Під час опрацювання лекційного матеріалу студент досліджує конкретний економічний процес формалізований на основі математичних змінних, систематизує основні тенденції та формулює висновки щодо напрямків розвитку економіки у сучасних тенденціях розвитку.

Лекція 1. Оптимізація інвестиційного портфеля комерційної структури методом М.Марковіца.

Процеси прийняття рішень під час управління проектами відбуваються, як правило, в умовах впливу в тій чи іншій мірі невизначеності, що визначається такими факторами [1]:

- неповним знанням всіх параметрів, умов, ситуації для вибору оптимального рішення, а також неможливістю адекватного і точного врахування всієї, навіть доступної, інформації та присутністю імовірнісних характеристик поведінки середовища;

- наявністю фактора випадковості, тобто реалізацією факторів, які неможливо передбачити та прогнозувати навіть під час імовірнісної реалізації;

- наявністю суб'єктивних факторів протидії, коли прийняття рішень виконується в ситуації гри з партнером з протилежними або не співпадаючими інтересами.

Ризик є одним із засобів зняття невизначеності, яка являє собою незнання достовірного, відсутність однозначності [2]. Ризик – діяльність, що пов'язана із подоланням невизначеності в ситуації неминучого вибору, в процесі якої є можливість кількісно та якісно оцінити імовірність досягнення передбачуваного результату, невдачі та відхилення від цілей [3].

В даній роботі розглянемо способи оцінки ризиків процесі оптимізації інвестиційного портфеля (ІП).

ІП [4] – сукупність цінних паперів (ЦП), що розглядаються під час управління як єдине ціле. Під час формування ІП інвестор повинен:

- обрати адекватні ЦП, тобто такі, які б надавали максимально можливу дохідність та мінімально допустимий ризик;

- визначити, в ЦП яких емітентів варто вкладати кошти;

- диверсифікувати ІП: інвестору потрібно вкладати гроші в різноманітні ЦП, а не в один їх вид, з метою зниження ризику вкладів.

Під час вибору ІП важливо правильно оцінити майбутні ризики, адже від обраних фінансових інструментів прямо залежить дохідність затрачених ресурсів. Невірна оцінка ризиків може призвести до зменшення прибутку, який можна було б отримати, або в крайньому випадку до збитків. Тому інвестору важливо обрати той підхід, який би, зважаючи на конкретні умови застосування, дозволив найбільш ефективним шляхом вкласти наявні кошти в інвестиції. Виходячи з цього, актуальною проблемою є аналіз існуючих моделей оптимізації ІП щодо засобів оцінки ризиків в них, а також визначення умов застосування тієї чи іншої моделі та встановлення задач подальшого дослідження проблеми.

1. ОЦІНКА РИЗИКУ В МОДЕЛІ МАРКОВІЦА

Класичною методикою оптимізації ІП є модель Г. Марковіца [5]. В ній за міру ризику прийнято стандартне відхилення величини дохідності. Чим більше значення даного показника, тим більш ризикованим буде портфель.

В своїх дослідженнях Марковіц виходив з того, що значення дохідності ЦП – випадкові величини, що розподілені за нормальним (Гауссівським) законом. Він вважав, що, формуючи свій портфель, інвестор оцінює тільки два показники: очікувану дохідність $E(r)$ та стандартне відхилення δ (лише вони визначають щільність ймовірності випадкових чисел за умов нормального розподілу). Інвестор повинен оцінити дохідність та стандартне відхилення кожного портфеля і вибрати такий портфель, який забезпечує максимальну дохідність при прийнятному рівні ризику або мінімальний ризик при заданому рівні очікуваної дохідності.

Визначаючи ризик портфеля, варто враховувати, що дисперсія портфеля визначається не тільки середньозваженою величиною дисперсій ЦП, що входять в портфель. Це обумовлено тим, що дисперсія портфеля залежить не тільки від дисперсій ЦП, що входять до його складу, але також і від взаємозалежності дохідності окремих ЦП. Тобто ризик портфеля вимірюється не тільки індивідуальним ризиком кожної окремої ЦП портфеля, але і тим, що існує ризик впливу змін щорічних величин дохідності однієї акції на зміни дохідності інших акцій, що входять до складу ІП.

Як міру взаємозалежності двох випадкових величин використовують коваріацію та коефіцієнт кореляції. Позитивне значення коваріації – індикатор тенденції зміни дохідності двох ЦП в одних і тих самих напрямках, тобто якщо дохідність однієї акції збільшується (зменшується), то і дохідність іншої акції також збільшується (зменшується). Негативна коваріація свідчить відповідно про те, що збільшення (зменшення) дохідності акцій однієї компанії призводить до зниження (збільшення) дохідності акцій іншої компанії.

Якщо розглядаються величини дохідності ЦП за минулі періоди, то коваріація розраховується за такою формулою:

$$\delta_{i,j} = \sum_{t=1}^N [r_{i,t} - E(r_i)] \times [r_{j,t} - E(r_j)] / (N - 1), \quad (1)$$

де $\delta_{i,j}$ – коваріація між величинами дохідності ЦП i

та ЦП j ; $r_{i,t}$ та $r_{j,t}$ – дохідність ЦП i та ЦП j в момент часу t ; $E(r_i)$, $E(r_j)$ – очікувана (середньоарифметична) дохідність ЦП i та ЦП j ; N – загальна кількість періодів спостереження.

Задача оптимізації структури відповідного портфеля досягненням заданої дохідності з мінімальним ризиком називається задачею Марковіца і має такий вигляд (дана математична формалізація запропонована Дж. Тобіном):

$$\delta_n^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \delta_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \rho_{i,j} \delta_i \delta_j \rightarrow \min_w, \quad (2)$$

$$E(r_{\text{портфеля}}) = \sum_i w_i E(r_i), \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^n w_i = 1. \quad (4)$$

Аналітично наведена задача мінімізації неперервної функції з двома обмеженнями розв'язується за допомогою методу невизначених множників

Лагранжа [6].

Головними недоліками класичного підходу є вимога щодо нормального розподілу значень дохідності, можливість розгляду тільки конкретних значень дохідності та необхідність встановлення ймовірності їх досягнення. Ризиком вважаються всі відхилення від запланованих показників, як у менший, так і у більший бік.

Лекція 2. ОЦІНКА РИЗИКУ В МОДЕЛІ ШАРПА, та КВАЗІ-ШАРПА.

У. Шарп запропонував новий метод побудови границі ефективних портфелів – одноіндексну модель Шарпа [7], яка дозволяє значно скоротити обсяг необхідних обчислень. За допомогою даної моделі можливо представити взаємозв'язок між величинами норми віддачі r_m та дохідності i -го ЦП r_i , випадкові значення яких спостерігаються протягом N кроків, в будь-який момент часу t в такому вигляді [8]:

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad (5)$$

де α_i – параметр, що вказує на те, яка частина дохідності i -го ЦП не пов'язана зі змінними значеннями дохідності ринку ЦП r_m ; β_i – параметр, що вказує на чутливість дохідності i -го ЦП до змін ринкової дохідності; $\varepsilon_{i,t}$ – випадкова помилка, яка вказує на те, що реальні значення часом відхиляються від лінійної залежності.

В моделі Шарпа дисперсія портфеля представляється у вигляді:

$$\delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2 \delta_{e,i}^2. \quad (6)$$

При цьому $w_{n+1} = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i$, а $\delta_{e,n+1}^2 = \delta_m^2$. Тобто дисперсію портфеля, що містить n ЦП, можна представити такою, що складається з 2 компонент:

- середньозважені дисперсії помилок $\sum_{i=1}^{n+1} w_i^2 \delta_{e,i}^2$ (власний ризик);
- $\beta_n^2 \delta_m^2$ – зважена величина дисперсії ринкового показника β_m^2 (ринковий ризик).

Величини β_i та α_i розраховуються таким чином:

$$\beta_i = \frac{\delta_{i,m}}{\delta_m^2}, \quad (7)$$

$$\alpha_i = E(r_i) - \beta_i E(r_m). \quad (8)$$

В моделі Шарпа мета інвестора полягає у мінімізації дисперсії портфеля:

$$\delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2 \delta_{e,i}^2 \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} w_i \alpha_i = E^*, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \beta_i = w_{n+1}. \quad (12)$$

В моделі Шарпа не ліквідовано наведені в моделі Марковіца недоліки, проте зменшено обсяг обчислень за допомогою використання лінійної регресійної моделі.

В портфелі Тобіна [9] враховано можливість наявності в портфелі безризикових паперів, що дозволило спростити процес розв'язання задачі знаходження оптимального портфеля за умов вибору без ризикових ЦП, проте підхід для оцінки ризику в даній моделі такий самий, як і в моделі Марковіца.

2.2 МОДЕЛЮВАННЯ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЮ В УМОВАХ НЕСТАБІЛЬНОСТІ НА ПРИКЛАДІ МОДЕЛІ КВАЗІ-ШАРПА

Оптимізація структури портфеля цінних паперів – одне з найбільш важливих завдань ухвалення рішень в інвестиційній діяльності на фондовому ринку. Вирішення задачі портфельної оптимізації дозволяє фінансовим інститутам якнайкраще розподілити наявні фінансові кошти в цінні папери та зменшити ризик від помилкових рішень.

В економіці України процес ухвалення рішень на всіх рівнях управління відбувається в умовах постійної невизначеності кінцевих результатів діяльності. Часткова невизначеність пояснюється тим, що економічні проблеми зводяться до вибору з безлічі альтернатив. При цьому економічні агенти не мають у своєму розпорядженні повного знання інформації для вироблення оптимального рішення, а також не мають достатніх можливостей для адекватного обліку всієї доступної їм інформації.

Питанням портфельного інвестування займалися такі науковці, як Марковіц Г., Шарп У., Тобін Дж. і даєть динаміки портфелю в своїх роботах розглядали Блек Ф., Шоулз М., Домбровський В.В., Кузнєцов Д.Ф., Гаращенко Ф.Г., Рутицька В.В. і так далі. Проте в літературі не розглядається поєднання даних статичних та динамічних моделей.

Формування фондового портфелю інвестора в умовах нестабільності розвитку фондового ринку в Україні.

Основний об'єкт дослідження – дохідність отриманого фондового портфелю та його ризик.

У розпорядженні інвестора є N акцій, з певними дохідностями за певний період. Треба сформуванати фондовий портфель з максимальною дохідністю, а також з мінімальним ризиком.

Методологія. Результати дослідження отримані на основі економіко-математичного моделювання, економічної теорії та чисельного моделювання.

Результати дослідження. Нехай дохідність портфелю з N цінних паперів R_p та його ризикованість σ_p визначається функціями:

$$R_p = RETURN(W_i, \sigma_i, r_i; i = 1 \dots N)$$
$$\sigma_p = RISK(W_i, \sigma_i, r_i; i = 1 \dots N)$$

де:

W_i — процентна частка цінних паперів портфеля;

σ_i — деяка характеристика ризику даного цінного паперу, звичайно це середнє квадратичне відхилення дохідності цінних паперів;

r_i — дохідність цінних паперів [2].

При розв'язуванні задачі необхідно урахувати наступні натуральні обмеження:

- сума усіх акцій (у відсотках) складає 100%:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_i + \dots + W_n = 1$$

- кількість акцій не може бути від'ємною:

$$W_i \geq 0.$$

На сьогоднішній день найбільш розповсюджені 2 моделі визначення характеристик портфеля: модель Марковіца та модель Шарпа. Обидві моделі створені і успішно працюють в умовах, що склалися у відносно стабільних західних фондових ринків. Нажаль, до їх числа український фондовий ринок поки що не входить. Через це

була розпочата спроба створити модель, яка здатна успішно функціонувати в умовах фондового ринку, що формується, розвивається та реорганізується, яким є фондовий ринок України [1,5]. Створена модель отримала назву Квазі-Шарп.

Модель базується на тому, що показники прибутковості різних цінних паперів взаємопов'язані: із зростанням доходності одних паперів спостерігається одночасне зростання і по іншим паперам, треті залишаються без змін, а в четвертих, навпаки доходність знижується. Такий вид залежності не детермінований, тобто однозначно визначений, а є стохастичним, і називається кореляцією [2].

Модель Марковіца має наступні основні припущення:

- за доходність цінних паперів приймається математичне очікування доходності;
- за ризик цінних паперів приймається середнє квадратичне відхилення доходності;
- вважається, що дані минулих періодів, які використані при розрахунках доходності і ризику, повністю відображають майбутні значення доходності;
- ступінь і характер взаємозв'язку між цінними паперами виражається коефіцієнтом лінійної кореляції.

З використанням моделі Марковіца для розрахунку характеристик портфеля пряма задача набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N W_i * r_i \rightarrow \max \\ \sqrt{\sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N (W_i * \sigma_a * W_b * \sigma_b * \rho_{ab})} \leq \sigma_{rbq}; \\ W_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^N W_i = 1 \end{array} \right.$$

Модель Квазі-Шарп ґрунтується на взаємозв'язку доходності кожного цінного папера з деякого набору N цінних паперів з доходністю одиничного портфеля з цих паперів [2].

Основні припущення моделі Квазі-Шарп полягають у наступному:

- за характеристику доходності цінного папера береться математичне очікування доходності;
- під одиничним портфелем цінних паперів слід розуміти портфель, що складається з усіх цінних паперів, що розглядаються, взятих у рівній пропорції;
- взаємозв'язок доходності цінного папера і доходності одиничного портфелю описується лінійною функцією
- під ризиком цінного папера слід розуміти ступінь залежності змін доходності цінного папера від змін доходності одиничного портфеля;
- вважається, що дані минулих періодів, використані при розрахунку доходності та ризику, відображають повною мірою майбутнє значення доходності.

За моделлю Квазі-Шарп доходність цінного папера пов'язується з доходністю одиничного портфеля функцією лінійної регресії вигляду:

$$R_i = \bar{R}_i + \beta_i(R_{sp} - \bar{R}_{sp})$$

де:

R_i — доходність цінного паперу;

R_{sp} — доходність одиничного портфеля;

β_i — коефіцієнт регресії;

\bar{R} — середня доходність цінного папера за минулі періоди;

\bar{R}_{sp} — середня доходність одиничного портфеля за минулі періоди [3].

З використанням моделі Квазі-Шарп для розрахунку характеристик портфеля пряма задача набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N (\bar{R}_i W_i) + (R_{sp} - \bar{R}_{sp}) \sum_{i=1}^N (\beta_i W_i) \rightarrow \max \\ \sqrt{\sum_{a=1}^N (\beta_i W_i)^2 \sigma_{sp}^2 \sum_{b=1}^N (\sigma_{ri}^2 W_i^2)} \leq \sigma_{rbq}; \\ W_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^N W_i = 1 \end{array} \right.$$

При практичному застосуванні моделі Квазі-Шарп для оптимізації фондового портфеля використовуються наступні формули:

1) За доходність одиничного портфеля у період t береться середнє значення доходності цінних паперів, що його складають, за цей же період:

$$R_{sp}^T = \frac{\sum_{i=1}^N R_i^T}{N}$$

де:

R_{sp}^T — доходність одиничного портфеля в період t

R_i^T — доходність i -го цінного папера за період t .

2) Середня доходність цінного папера за минулі періоди:

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{i=1}^T R_i^T}{T}$$

де:

R_i^T — доходність цінного папера за період t ,

T — кількість періодів часу, що розглядається.

3) Середня доходність одиничного портфеля за минулі періоди:

$$\bar{R}_{sp} = \frac{\sum_{i=1}^T R_{sp}^t}{T}$$

4) Коефіцієнт β цінного папера розраховується за формулою:

$$\beta_i = \frac{\sum_{i=1}^T [(R_i^T - \bar{R}_i)(R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})]}{\sum_{i=1}^T (R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})^2}$$

5) Залишковий ризик цінного паперу:

$$\sigma_i = \frac{\sum_{i=1}^T (R_i^T - \bar{R}_i - \beta * R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})^2}{T}$$

6) Ризикованість одиничного портфеля:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^T R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})^2}{T}}$$

В фінансовій економіці, на ряду з багато численними математичними моделями, зустрічається наступна модель динаміки дохідності портфелю цінних паперів у вигляді системи диференційних рівнянь Іто вигляду:

$$\begin{bmatrix} dx_t^{(1)} \\ \dots \\ dx_t^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{(1)} \\ \dots \\ m^{(n)} \end{bmatrix} dt + e^{\frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^n x_t^{(i)}} \begin{bmatrix} B^{(11)} & \dots & B^{(1m)} \\ \dots & \dots & \dots \\ B^{(n1)} & \dots & B^{(nm)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} df_t^{(1)} \\ \dots \\ df_t^{(m)} \end{bmatrix}$$

де $x_t^{(i)}$ – дохідність і-го цінного паперу;

$m^{(i)}$ – середній рівень дохідності і-го цінного паперу;

γ – емпіричний коефіцієнт;

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_t^{(i)}$ – середня дохідність по множині цінних паперів;

$\|B^{(ij)}\|_{i,j=1}^{n,m}$ – числова матриця, яка характеризує перемішування;

$f_t^{(i)} (i = 1, \dots, m)$ – незалежні стандартні вінеровські процеси

Лекція 3 ОЦІНКА РИЗИКУ В МЕТОДОЛОГІЇ VALUE-AT-RISK.

Методологія Value-at-Risk (VaR) дозволяє оцінити величину максимально можливих збитків на визначеному горизонті планування із встановленим рівнем ймовірності [10]. На відміну від попередніх моделей, в даній методології під втратами розуміють від'ємну зміну вартості портфеля фінансових інструментів в момент часу t та в момент $t - 1$:

$$\Delta P = P_t - P_{t-1}. \quad (13)$$

Показник VaR може бути оцінений на основі величини абсолютних збитків або величини втрат відносно середнього доходу. Існує три основні методики розрахунку VaR: метод історичного моделювання, метод параметричної оцінки, метод імітаційного моделювання.

В загальному випадку даного підходу, якщо досліджуваний показник необхідно максимізувати, то VaR можна обчислити за допомогою формули:

$$VaR = m - kM_r, \quad (14)$$

де m – математичне очікування; M_r – міра ризику (взагальному випадку – середньоквадратичне відхилення); k – коефіцієнт, який залежить від обраної довірчої ймовірності (встановлює вартість ризику).

Інвестор розглядає ризик, пов'язаний з несприятливими ситуаціями, як тільки несприятливі відхилення від очікуваних значень. В даному підході запропоновано за міру ризику використовувати семіваріацію [11], яка для величини X обчислюється таким чином:

$$SV(X) = \sum_{j=1}^n \alpha_j p_j (x_j - M(X))^2, \quad (15)$$

де n – кількість значень випадкової величини X ; x_j – значення випадкової величини, $j = 1, \dots, n$; p_j – відповідні ймовірності; $M(X)$ – математичне очікування випадкової величини X ; α_j – індикатор несприятливих відхилень, який визначають за формулою:

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{у випадку сприятливого} \\ & \text{відхилення,} \\ 1, & \text{у випадку несприятливого} \\ & \text{відхилення.} \end{cases} \quad (16)$$

Однак, одним із недоліків моделі Марковіца та класичної методології VaR є припущення про нормальність розподілу та наявність симетрії в розподілі. На практиці більшість економічних показників асиметричні. Тому в [12] за базу при розрахунках пропонується замість математичного очікування використати моду або медіану.

В такому випадку міра ризику визначається медіанною семіваріацією, яка обчислюється за допомогою формули:

$$SV_{M_e}(X) = \sum_{j=1}^n \alpha_j p_j (x_j - M_e(X))^2, \quad (17)$$

де $M_e(X)$ – медіана випадкової величини X .

Таким чином, методологія VaR та розглянуті її модифікації дозволяють усунути такі недоліки моделі Марковіца: припущення про нормальність розподілу досліджуваної величини та врахування як негативних, так і позитивних відхилень значень досліджуваної величини під час обчислення міри ризику.

Лекція 4. ОЦІНКА РИЗИКУ В НЕЧІТКОМУ ПІДХОДІ ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ.

В нечіткому підході на основі теорії можливостей [13] дохідність i -го ЦП представляється у вигляді трикутного нечіткого числа

$$r_i = (r_{1i}; \bar{r}_i; r_{2i}), \quad (18)$$

де r_{1i} – нижня межа дохідності i -го ЦП; \bar{r}_i – очікувана дохідність i -го ЦП; r_{2i} – верхня межа дохідності i -го ЦП.

Дохідність портфеля визначається таким чином [14]:

$$r = \left(r_{\min} = \sum_{i=1}^N w_i r_{1i}; \bar{r} = \sum_{i=1}^N w_i \bar{r}_i; r_{\max} = \sum_{i=1}^N w_i r_{2i} \right). \quad (19)$$

Критичний рівень дохідності портфеля на момент часу T представляється як $r^* = (r_1^*; \bar{r}^*; r_2^*)$. Тоді взаємне співвідношення функцій приналежності r_i та критеріального значення r^* дозволяє розрахувати площу фігури, яка утворюється в результаті перетину цих функцій, таким чином:

$$S_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r_1 \geq r_2^*; \\ \frac{(r_2^* - r_1)^2}{2}, & \text{якщо } r_2^* > r_1 \geq r_1^*; r_2 \geq r_2^*; \\ \frac{(r_1^* - r_1) + (r_2^* - r_1)}{2} (r_2^* - r_1), & \text{якщо } r_1 < r_1^*; r_2 > r_2^*; \\ (r_2^* - r_1^*)(r_2 - r_1) - \frac{(r_2 - r_1^*)^2}{2}, & \text{якщо } r_1 < r_1^* \leq r_2; r_2 < r_2^*; \\ (r_2^* - r_1^*)(r_2 - r_1), & \text{якщо } r_2 \geq r_1^*. \end{cases} \quad (20)$$

В такому випадку ступінь ризику неефективності $\phi(\alpha)$ є геометрична ймовірність випадку потрапляння точки (r, r^*) в зону неефективного розподілу

капіталу

$$\varphi(\alpha) = \frac{S_\alpha}{(r_2^* - r_1^*)(r_2 - r_1)}. \quad (21)$$

Значення ступеня ризику неефективності портфеля дорівнює

$$\beta = \int_0^{\alpha_1} \varphi(\alpha) d\alpha, \quad (22)$$

де α_1 – ордината точки перетину функцій приналежності r та r^* .

Тоді, використовуючи формули (20)–(22), ступіньризикудорівнюватиме

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r^* < r_{\min}; \\ R \left(1 + \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \ln(1 - \alpha_1) \right), & \text{якщо } r_{\min} \leq r^* \leq \bar{r}; \\ 1 - (1 - R) \left(1 + \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \ln(1 - \alpha_1) \right), & \text{якщо } \bar{r} \leq r^* < r_{\max}; \\ 1, & \text{якщо } r^* \geq r_{\max}, \end{cases} \quad (23)$$

де

$$R = \begin{cases} \frac{r^* - r_{\min}}{r_{\max} - r_{\min}}, & \text{якщо } r^* < r_{\max}; \\ 1, & \text{якщо } r^* \geq r_{\max}, \end{cases} \quad (24)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r^* < r_{\min}; \\ \frac{r^* - r_{\min}}{\bar{r} - r_{\min}}, & \text{якщо } r_{\min} \leq r^* < \bar{r}; \\ 1, & \text{якщо } r^* = \bar{r}; \\ \frac{r_{\max} - r^*}{r_{\max} - \bar{r}}, & \text{якщо } \bar{r} < r^* < r_{\max}; \\ 0, & \text{якщо } r^* \geq r_{\max}. \end{cases} \quad (25)$$

Таким чином, за умов даного підходу необхіднорозв'язати наступну задачу оптимізації:

$$r = \sum_{i=1}^N w_i r_i \rightarrow \max; \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i r_{1i} > r^*; \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad w_i \geq 0; \quad i = \overline{1, N}. \quad (28)$$

В даній моделі ліквідовано недоліки підходів наоснові теорії ймовірності. Знято вимоги щодо нормального розподілу значень дохідності, розглядається не можливість досягнення окремих значень показника дохідності, а цілий інтервал значень, ймовірність досягнення яких не потрібно визначати наперед. Окрім того, на відміну від моделі Марковіца, при нечіткому підході за ризик приймаються тільки значення дохідності, які виявились менше запланованого.

Аналіз існуючих методів оптимізації інвестиційного портфеля дозволив зробити висновки щодо умов їх використання.

У випадку однорідності ринку, коли із впевненістю можуть бути встановлені ймовірності досягнення того чи іншого значення дохідності, варто застосовувати для оптимізації інвестиційного портфеля модель Марковіца. Якщо критичною проблемою є зменшення обсягів обчислень, то кращим варіантом оптимізації є модель Шарпа, де застосовується лінійна регресійна модель.

Коли інвестор бажає враховувати як міру ризику тільки негативні відхилення значень досліджуваного показника, варто застосовувати методологію Value-at-Risk. Окрім того, якщо розподіл значень показника, що розглядається, не відповідає нормальному закону, необхідно використовувати модифіковану методологію Value-at-Risk, в якій за міру ризику прийнято медіанну семіваріацію.

Якщо досліджуваний ринок неоднорідний (що характерно для кризових явищ) і необхідно розглянути весь інтервал можливих значень дохідності (і їх розподіл може не відповідати нормальному закону), потрібно застосувати нечіткий підхід на основі теорії можливостей. Даний метод дозволяє також, як і модифікована методологія Value-at-Risk, за міру ризику враховувати тільки негативні відхилення значень показника.

В процесі подальшого дослідження необхідно виконати такі завдання:

- а) розробити програмний комплекс для реалізації проаналізованих методів;
- б) дослідити на основі експериментальних даних проаналізовані методи оптимізації та використовувати в них способи оцінки ризику;
- в) визначити шляхи застосування математичного апарату для оптимізації інвестиційного портфеля та оцінки ризиків, ґрунтуючись на отриманих результатах практичного дослідження, з метою усунення недоліків;
- г) модифікувати нечіткий підхід з метою використання суджень експертів в нечіткій формі.

Лекція 5 . ЗАСТОСУВАННЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ У ЛОГІСТИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ ПІДПРИЄМСТВА.

Теоретичні основи здійснення логістичної діяльності підприємства.

В сучасних кризових умовах конкуренція на ринку товарів та послуг постійно посилюється, і зазвичай на ринку залишається та фірма чи підприємство, яке може організувати правильно свою роботу, використовуючи всі сучасні методи планування та прогнозування фінансових результатів, а оскільки транспортні витрати завжди в собівартості товарів та послуг займають левову частку, то оптимізація транспортних маршрутів, оптимізація часу на перевезення товарів та сировини, суттєво скорочують витрати підприємства та збільшує прибуток, а отже посилює конкурентоспроможність підприємства на ринку товарів та надання послуг.

Оптимальна організація окремих етапів не є умовою оптимальності всього процесу. Однак уміння визначати оптимально можливі результати на будь-якому етапі дозволяє забезпечити дослідників і виробників важливим критерієм для

оцінки впливу цього етапу на ефективність усього процесу. Тому проблема оптимізації кожного етапу транспортного процесу завжди буде залишатися актуальною, але не завжди – визначальною.

Основними учасниками процесу перевезень є виробники, експедитори, торгові фірми і перевізники. Слід враховувати, що в процесі перевезень кожний з учасників переслідує свої цілі, має власні прибутки та витрати.

Розглянемо прибутки і витрати всіх учасників перевезень у рамках процесу транспортування товару, абстрагуючись від його виробництва та продажу.

Прибутками експедитора є оплата фірмою-виробником доставки товару та штрафи. Витрати експедитора – це витрати на пошук перевізника, оплата вартості перевезення, витрати на доставку, штрафи і т.п.

Прибутками перевізника є оплата тарифу перевезення, компенсації за змушену затримку або простою рухомого складу.

Витрати складаються із знижок експедитору, витрат на підготовку та здійснення процесу перевезення.

Прибутками торгової фірми є штрафи, оговорені в контракті.

Модель учасників системи доставки може бути подана у вигляді кортежу [].

$$SD = P, EXP, PER, TF, \quad (5.1)$$

де $P = P(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – множина виробників,

$\{P_1\} EXP = EXP y = y_1, y_2, \dots, y_m$ – множина експедиторів,

$\{P_2\} PER = PER z = z_1, z_2, \dots, z_k$ – множина перевізників;

$\{P_3\} TF = TF t = t_1, t_2, \dots, t_l$ – множина торгових фірм.

Тут має місце процес доставки, у якому беруть участь n виробників, m експедиторів, k перевізників і l торгових фірм.

У загальному випадку цільова функція системи доставки, що визначає якість товару та витрати коштів і часу на його перевезення, має вигляд $E(SD) \rightarrow \min$. (5.2)

Якість системи визначається надійністю доставки, своєчасністю і тривалістю транспортування вантажів, транспортними витратами, гнучкістю перебудови схеми транспортування відповідно до потреб споживачів, схоронністю вантажу, швидкістю підготовки документів, витратами на кріплення, завантаження і

складування вантажів, витратами на страхування перевезення.

Узагальнена модель (1.1) може бути використана у роботі для дослідження якості системи доставки за умови її конкретизації більш точними математичними виразами, що описують усі умови процесу, прибутки та витрати всіх учасників перевезень: і виробників, і експедиторів, і перевізників, і споживачів. У роботі [4] наведений алгоритм планування вантажних автомобільних перевезень, що відповідає такій моделі. Він полягає у виконанні наступних етапів:

1. *Формування бази даних.* База даних повинна містити відомості про:

- кількість вантажовідправників і вантажоодержувачів;
- об'єми вантажу на складах вантажовідправників і його основні характеристики;
- потреби кожного вантажоодержувача в об'ємах вантажу;
- кількість, тип і вантажопідйомність транспортних засобів;
- обмеження, що накладаються вантажовідправником і вантажоодержувачем на партію вантажу, що може бути відправлений або отриманий відповідним суб'єктом;
- обмеження в часі на доставку вантажів у пункти призначення або вивозу вантажу з пунктів відправлення;
- відстані між пунктами навантаження і розвантаження;
- питомі тимчасові витрати на переміщення вантажу на одиницю відстані на кожній ділянці маршруту;
- питомі матеріальні витрати на переміщення одиниці вантажу на одиницю відстані;
- витрати часу на навантаження і розвантаження;
- можливі затримки в часі у процесі проходження маршруту та інші.

2. *Визначення типу схеми організації перевезень.* Визначення робиться на підставі отриманих замовлень на доставку. Схеми перевезень підрозділяються за типами, а саме: «один-до одного», «один-до-багатьох», «багато-до-одного» та «багато-до-багатьох». Схема типу «один-до-одного» припускає, що від одного постачальника (з одного пункту відправлення) необхідно доставити вантаж тільки одному замовнику (в один пункт призначення). Під схемою типу «один-до-багатьох» мається на увазі, що доставка буде виконуватися від одного постачальника та доставлятися багатьом замовникам. Схема «багато-до-одного» припускає перевезення від багатьох постачальників тільки до одного замовника. При організації перевезень за схемою «багато-до-

багатьох» вантаж постачається від декількох виробників або декількох складів одного виробника декільком замовникам

3. *Моделювання процесу перевезення.* У найбільш загальному випадку перевезення вантажу здійснюється за схемою «багато-до-багатьох», тому в першу чергу увага дослідників приділяється саме математичній моделі перевезень цього типу. Формальна постановка класичної транспортної задачі має вигляд:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \quad (5.3)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1, m}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, n} \quad j = \overline{1, m}$$

де n – кількість постачальників (вантажовідправників); m – кількість споживачів (вантажодержувачів); a_i – обмеження за пропозицією (сумарна кількість вантажу, що постачається i -м постачальником); b_j – обмеження за попитом (сумарна потреба в кількості вантажу j -го одержувача); c_{ij} – ваговий коефіцієнт, що визначає внесок у формування цільової функції одиниці вантажу, перевезеного від i -го постачальника до j -го одержувача;

x_{ij} – об'єм кореспонденції (кількість вантажу, що транспортується) між i -м постачальником і j -м одержувачем.

x_{ij} – об'єм кореспонденції (кількість вантажу, що транспортується) між i -м постачальником і j -м одержувачем.

4. *Розв'язання задачі перевезень.* Етап полягає у визначенні змінних (невідомих) x_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, у математичній моделі області припустимих рішень (1.2) – (1.3), що забезпечують мінімум функції витрат на перевезення вантажу (1.3). Навіть при малому числі постачальників і споживачів ($n, m < 10$) вирішення транспортної задачі методом прямого перебору всіх можливих варіантів пов'язане зі значними труднощами. При числі постачальників і споживачів ($n, m \geq 10$) оптимальне вирішення задачі методом прямого перебору проблематично навіть із використанням сучасної обчислювальної техніки.

5. *Визначення маршрутів перевезень.* На цьому етапі визначається, за якими маршрутами – маятниковим або розвізними (кільцевими) – буде поставлятися

вантаж від постачальників до споживачів за результатами вирішення транспортної задачі (1.1) – (1.3). У випадку, коли постачальнику та споживачам від повідає схема типу «один-до-багатьох», розв’язання цієї задачі зводиться до розв’язання задачі комівояжера [4].

6. *Моделювання часу перевезень.* Моделюється час поставки товару кожному зі споживачів. Визначення часу, протягом якого транспортні засоби перевозять вантаж, здійснюється за формулою:

$$T_n = \sum_j^A t_{nj} + \sum_k^B t_{grk} + \sum_j^C t_{pj} + \sum_k^B t_{xk} + \sum_j^A \eta_j + \sum_i^C \psi_i \quad (5.4)$$

де t_{nj} – час навантаження транспортного засобу j -м постачальником, включаючи час чекання навантаження; A – кількість постачальників, що забезпечують завантаження транспортного засобу, $A \leq n$; t_{grk} – час руху транспортного засобу з вантажем на k -й ділянці; B – кількість неоднорідних ділянок на маршруті;

t_{xk} – час руху транспортного засобу без вантажу на k -й ділянці;

$p_i t$ – час розвантаження вантажу для i -го споживача, включаючи час чекання розвантаження; C – кількість споживачів, яким розвозиться вантаж, $C \leq m$; η_j – випадкова величина, що враховує обідні (технологічні) перерви j -го постачальника; ψ – випадкова складова, що враховує обідні (технологічні) перерви i -го споживача.

Для міжнародного перевезення загальний час знаходження автомобіля в рейсі (на маршруті) визначається за формулою:

$$T_0 = \sum_{i=1}^A t_{i,i+1} + \sum_{j=1}^B \tau_j + \sum_{k=1}^C \Theta_k + \sum_{l=1}^D \varphi_l + \sum_{m=1}^E \psi_m + \sum_{n=1}^F \eta_n \quad (5.5)$$

де $t_{i,i+1}$ – час руху між i -м і $(i + 1)$ -м пунктами маршруту; A – кількість ділянок руху автомобіля на маршруті; τ_j – час оформлення митних документів у j -му пункті; B – кількість пунктів митного оформлення на маршруті; Θ_k – час навантаження, розвантаження і складування в k -му пункті; C – кількість пунктів навантаження-розвантаження; φ – випадкова складова, що відображує збільшення часу рейсу для проведення ремонтно-профілактичних робіт і інших причин простою транспортного засобу; ψ_m – випадкова складова, що відображує обмеження, що зв'язані з ЕСТР; η_n – випадкова складова, що відображує заборони на рухи великовантажних автомобілів; D, E, F – число випадків простою автомобіля з врахуванням останніх трьох зазначених чинників відповідно.

Розрахувавши час рейсу, можна визначити час прибуття до кожного зі споживачів.

7. *Аналіз виконання вимог і умов перевезень.* Виконується перевірка відповідності очікуваних строків доставки строкам, обговореним із споживачем. У випадку, якщо умови споживача не виконуються, здійснюється коректування маршрутів, вантажопідйомності транспортного засобу, розкладу роботи складів і таке інше. У випадку, коли коректування приводить до зміни математичної моделі процесу перевезення, етапи 4 – 7 виконуються наново.

8. *Завантаження транспортного засобу та безпосередня реалізації перевезень.* Фактично, етап є критерієм усього процесу перевезення. Нормальне завершення етапу свідчить про правильну організацію транспортування вантажу. Якщо виконання етапу виявляє які-небудь небажані відхилення в запланованого процесу перевезення, то їх оперативне усунення здійснюється не в межах цього алгоритму. Усі виявлені відхилення, як небажані, так і позитивні, повинні бути враховані при моделюванні наступних перевезень.

Недоліком наведеного алгоритму є його трудомісткість і орієнтованість на невелику кількість постачальників і споживачів [4, 6]. Крім того, нераціональним є побудова маршрутів без урахування вантажопідйомності автомобіля, що здійснює перевезення вантажу. Зокрема, для групи «постачальник – споживачі», можливо, прийдеться вирішувати задачу розвезення, а не задачу комівояжера. Рішення транспортної задачі з урахуванням вантажопідйомності доступних транспортних засобів може не

збігатися з рішенням, отриманим без урахування вантажопідйомності транспортного засобу. У статті [6] автори пропонують наступні доповнення:

- після формування бази даних, що описують транспортну мережу, пропонується локалізувати склади та клієнтів за територіальною ознакою;
- процес маршрутизації сполучати з вибором транспортних засобів відповідної вантажопідйомності.

Наведений алгоритм планування реальних вантажних автомобільних перевезень, як правило, має лінійну структуру – всі етапи виконуються послідовно один за іншим. Але, у загальному випадку прагнення врахувати всі чинники, що впливають на процес транспортування вантажу, всі альтернативні маршрути і способи доставки, приводить до порушення лінійності. При цьому схема може мати

як лінійні, так і розгалужені та циклічні фрагменти.

Для підвищення ефективності процесу транспортних перевезень, у т.ч. і автомобільних, застосовують формальний (науково обґрунтований) або евристичний підхід. Останній полягає в використанні експертів, що володіють досвідом організації подібних процесів [6]. Такий підхід не гарантує найбільш вдалого використання транспортних ресурсів або отримання максимального економічного ефекту від процесу транспортування.

Зовсім інші результати забезпечує економіко-математичний підхід. Саме він використовує математичні моделі та методи пошуку оптимальних параметрів транспортного процесу, що гарантують максимальний економічний ефект. Крім наукового та евристичного підходу, може бути застосований змішаний підхід, коли організація деяких етапів вантажних перевезень будуються на евристичному підході, деякі – на формальному. Кожний із цих підходів може бути визначальним при організації транспортного процесу або бути присутнім поряд з іншими.

Серед усіх етапів планування транспортних перевезень етапи «моделювання процесу перевезень» і «розв'язання транспортної задачі» залишаються центральними. Пояснюється це тим, що моделювання процесу перевезення з наступним визначенням оптимального розподілу наявних об'ємів вантажу у постачальників між одержувачами дозволяє не тільки повною мірою забезпечити вимоги останніх, але і зробити це з мінімальними витратами. Іншими словами, такий підхід дозволяє «на папері» дістати прибуток, що втрачається при евристичному або інтуїтивному плануванні перевезень. При цьому аналітичні методи пошуку раціональних варіантів дозволяють уникнути процесу прямого перебору варіантів.

На рис. 1.1 наведено схему, що класифікує задачі організації перевезень. Ці задачі за змістовною постановкою безпосередньо стосуються процесу транспортування вантажів або пасажирів. За математичними моделями вони належать до класу детермінованих задач лінійного неперервного або дискретного програмування.

Як бачимо, всі задачі за співвідношенням кількості постачальників (пунктів відправлення) та кількості замовників (пунктів призначення) підрозділяються на чотири типи:

- «один-до-одного»;

- «один-до-багатьох»;
- «багато-до-одного»;
- «багато-до-багатьох».

Моделювання задач перевезень

Всі задачі організації перевезень можна розподілити також за їх призначенням. Для кожного типу задач, що розподілені за ознакою постачальник/замовник, перелічено найбільш характерні класи задач, що відрізняються один від одного призначенням.

Так, для задач типу «один-до-одного» це:

- вибір транспортних засобів та розподіл вантажу;
- формування парку машин та їх розподіл.

Задачі типу «один-до-багатьох» складаються з класів:

- розподіл транспортних засобів за витратами часу;
- розподіл транспортних засобів за обсягом перевезень;
- розподіл транспортних засобів за витратами коштів;
- розподіл транспортних засобів із фіксованими доплатами;
- формування парку машин та їх розподіл;
- розвезення вантажу;
- вибір маршруту.

Тип задач «багато-до-одного» має майже такі ж самі класи,що й тип «один-до-багатьох»:

- планування випуску продукції;
- розподіл транспортних засобів за витратами часу;
- розподіл транспортних засобів за обсягом перевезень;
- розподіл транспортних засобів за витратами коштів;
- розподіл транспортних засобів із фіксованими доплатами;
- формування парку машин та їх розподіл;
- зведення вантажу;
- вибір маршруту.

Найбільш поширеним типом задач організації перевезень є

останній тип «багато-до-багатьох». Саме до цього типу належить класична транспортна задача (1.2) – (1.3) та її різновиди.

Він об'єднує такі класи задач:

- класична транспортна задача;
- транспортна задача з неперервною відкритою математичною моделлю;
- транспортна задача з дискретною математичною моделлю;
- перевезення вантажу за два етапи;
- перевезення вантажу декількох видів за два етапи;
- перевезення вантажу декількох видів за два етапи за замовленнями споживачів;

Перелік класів за призначенням налічує 25 найменувань.

Тут треба зауважити, що цей перелік не претендує на вичерпаність. Він містить тільки найбільш відомі класи. Головне, що клас можна розподілити ще на підкласи за видом математичної моделі задачі. Кожний клас задач має декілька різновидів, що відрізняються один від одного або виглядом цільової функції, або виглядом обмежень на змінні або тим та іншим одночасно. Загальну кількість підкласів важко визначити. Практика перевезень постійно пропонує нові математичні моделі, тому зосереджувати увагу на кожній моделі нема сенсу. Проте надалі принаймні одна з математичних моделей для кожного класу задач буде докладно розглянута.

При подальшому розгляді математичних моделей незалежно від класу задач, до якого вони належать, буде наведено відповідні загальні змістовні та математичні постановки задач, конкретні приклади задач, математичні та цифрові моделі в інформаційному середовищі *Microsoft Excel* (за умовами прикладів), розв'язання прикладів за допомогою програмного засобу.

Моделювання задач перевезень

Такий розгляд може послужити прекрасним довідником для побудови математичних моделей або посібником для розв'язання реальних виробничих транспортних задач невеликої вимірності. На жаль, вимірність задач обмежується як обчислювальними ресурсами комп'ютера, на якому інстальоване середовище *Microsoft Excel*, так і алгоритмічними особливостями програми «Пошук рішення». Проблема вимірності стосується всіх класів задач з організації перевезень. В подальшому при розгляді різних класів задач увага на проблемі вимірності зосереджуватися не буде.

Задачі типу «один-до-одного» складаються з двох класів:

- вибір транспортних засобів і розподіл вантажу;
- формування парку машин та їх розподіл.

- оптимізація часу на доставку вікон споживачам.

Розглянемо послідовно обидва класи.

Математична модель задачі про вибір транспортних засобів і розподіл вантажу

Наведемо приклад побудови математичної моделі задачі моделювання перевезень товару споживачам, якщо споживачів в день в середньому чотири, то відповідно до загальної моделі транспортної задачі (1.1) – (1.3), модель буде мати вигляд:

$$y = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 \rightarrow \min \quad (1.7)$$

$$\Omega : f1 = 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - (z_{11} + z_{12}) \geq 0 ,$$

$$f2 = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - (z_{21} + z_{22}) \geq 0 ,$$

Моделювання задач перевезень

$$f3 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - (z_{31} + z_{32}) \geq 0 ,$$

$$f4 = z_{11} + z_{21} + z_{31} = 220 ,$$

$$f5 = z_{12} + z_{22} + z_{32} = 130 ,$$

$$0 \leq x_1 \leq 15 ,$$

$$0 \leq x_2 \leq 20 ,$$

$$0 \leq x_3 \leq 30 ,$$

$$0 \leq x_4 \leq 25 ,$$

$$x_j = \text{int}, j = 1, 4, z_{ik} \geq 0, i = 1, 3; k = 1, 2 .$$

Аналіз існуючих методів маршрутизації для перевезень дрібного вантажу

Як було відзначено вище, розв'язання задачі розвезення дрібного вантажу при певних умовах може бути зведене до розв'язання задачі комівояжера або задачі розвозу. Задача комівояжера припускає проходження всіх пунктів доставки на протязі одного рейсу, тобто будується тільки один маршрут. В задачі розвозу будується декілька маршрутів.

Методи розв'язання зазначених задач діляться на дві основні групи. Перша з них – точні методи, що гарантують об'єктивно оптимальні рішення. Друга – наближені методи, що дозволяють наблизитися до оптимального рішення з заданою точністю наближення.

Одним із відомих точних методів розв'язання задачі комівояжера є метод динамічного програмування [15]. Даний метод призначений для розв'язання широкого кола задач, що можуть бути розбиті на доповнюючи одна одну під задачі,

причому оптимальне рішення цих під задач може бути використане для розв'язання вихідної задачі. Спочатку здійснюється розв'язання під задач, а далі на підставі отриманих рішень знаходиться рішення вихідної задачі.

Стосовно до задачі комівояжера під задачею є початкова частина маршруту, що містить в собі деяку кількість пунктів, що менша за загальну кількість. Рішення досягається за n ітерацій, де $(n + 1)$ – загальна кількість пунктів.

Спочатку знаходяться найкоротші маршрути, що проходять через один пункт. Потім, на їх підставі – найкоротші маршрути, що проходять через 2 пункти, і так далі. На останній ітерації знаходяться маршрути, що проходять через усі пункти. Ітеративний процес завершується оптимальним замиканням маршруту.

При пошуку маршруту з пункту i у пункт 0 з k транзитними пунктами, $k = 2, n$, маршрут, що містить $k - 1$ транзитний пункт, вибирається за критерієм

$$f(i; j_1, j_2, \dots, j_k) = \min \{d_{ijm} + f(j_{m-1}, j_1, j_2, \dots, j_{m-1}, j_{m+1}, \dots, j_k)\} \quad (5.8)$$

де d_{ijm} – довжина ланки транспортної мережі між пунктами i та j_m ; $f(i; j_1, j_2, \dots, j_k)$ – оцінка довжини маршруту з i в 0 , що проходить через пункти j_1, j_2, \dots, j_k .

При виборі маршруту з $(k - 1)$ -м транзитним пунктом не розглядаються маршрути, що містять пункт $i, i \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$.

У випадку, коли на деякому кроці всі маршрути, що відповідають оцінкам $f(j_m; j_1, j_2, \dots, j_{m-1}, j_{m+1}, \dots, j_k)$, $j_m = 1, n$, містять пункт i , тобто не можуть бути використані для побудови, використовуються маршрути з $k - 2$ транзитними пунктами, $k - 3$ пунктами і так далі.

Час роботи такого алгоритму визначається еквіпотенціальною величиною $O(n^2 - 2n)$. У зв'язку з особливостями алгоритму треба зберігати всі проміжні обчислення. Це приводить до того, що при реалізації алгоритму необхідний об'єм пам'яті ЕОМ також зростає в експоненціальній залежності від вимірності задачі [16]. Перевантаження пам'яті робить неможливим нормальне завершення процесу розв'язання задачі.

У [17] була запропонована модифікація методу динамічного програмування, що спрощує пошук оптимального рішення за допомогою корекції функцій стану. Корекція дозволяє заздалегідь зазначити варіанти, що перевищують верхню границю, отже, свідомо неоптимальні, і вилучити їх із розгляду.

Для вибракування елементів матриці пропонується використовувати відношення:

$$p_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sum_{k=1}^n d_{ik}} \quad (5.9)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

і залишати в матриці заздалегідь обумовлену кількість елементів, що мають найменше значення p_{ij} . Інші елементи матриці приймаються рівними нескінченно великому значенню. При цьому відхилення від оптимального результату складає 1 – 1,5 %. Така модифікація дозволяє знаходити квазіоптимальні рішення для задач вимірністю в 30 – 40 пунктів

Серед точних методів найбільш широке визнання одержав метод «гілок і границь» [5,18]. Метод «гілок і границь» заснований на розбитті множини маршрутів об'їзду всіх пунктів транспортної мережі на підмножини з подальшим поступовим відсіюванням безперспективних підмножин. Процес продовжується до одержання підмножини, що містить один маршрут мінімальної довжини. Перспективними вважаються підмножини, що мають мінімальну оцінку, тобто довжини маршруту, що збігається довжиною оптимального маршруту комівояжера. Графічно розбивка подається у вигляді дерева, вершинами якого є отримані підмножини. Для обчислення оцінок підмножин дані про транспортну мережу, що містять n пунктів, подаються у вигляді матриці $\{d_{ij}\}_{n \times n} \in \mathbf{D}$, у якій занесені всі відстані між пунктами мережі.

Точна нижня границя маршруту комівояжера для всієї множини маршрутів L дорівнює сумі мінімальних елементів кожного з рядків матриці \mathbf{D} та мінімальних елементів у стовпцях матриці \mathbf{D} після редукування по рядках:

$$L = \sum_{i=1}^n \min d_{ij} + \sum_{j=1}^n \min (d_{ij} - \min d_{ij}) \quad (5.10)$$

при $j \in (1, \dots, n), i \in (1, \dots, n)$

Редукування – це зменшення всіх елементів рядка на величину його найменшого елемента. Редукування робиться на кожній ітерації для рядків і стовпців одержуваних матриць.

Точна нижня границя підмножин оцінюється аналогічним способом, але при

цьому використовуються відповідні їм матриці.

При розбивці вихідної множини та всіх проміжних підмножин щораз одержують дві непересічні підмножини. Одна з підмножин є множиною маршрутів, що містять деяку ланку (i, j) транспортної мережі, друга – множину маршрутів, що не містить цієї ланки. Точна нижня границя довжини маршруту комівояжера для першої із підмножин дорівнює точній

нижній границі L вихідної множини, для другого з підмножин –

сумі $L + f(i, j)$, де $f(i, j)$ – оцінка, що обчислена для ланки (i, j) за формулою:

$$f(i, j) = \min \{d_{iq}\} + \min \{d_{pj}\} \quad (5.11)$$

Тут числа d_{iq} і d_{pj} – це елементи матриці відстаней після операцій зведення.

Для розбивки на підмножини вибирається ланка (i, j) з найбільшою оцінкою $f(i, j)$:

$$(f(i, j) = \max_{p,q} f(p, q) \quad (5.12)$$

З розгляду виключаються ланки, що можуть викликати передчасне замикання (передчасний цикл) маршруту комівояжера.

У випадку, якщо на якомусь із етапів виявляється, що нижня границя якоїсь із підмножин, залишених не розділеними, менше, ніж нижня границі знов отриманих підмножин, Задача комівояжера великої вимірності то досягнутий результат зберігається, і розгалуження дерева продовжується з вершини, якій відповідає найменша нижня границя.

Метод може застосовуватися для розбиття транспортної мережі, що складається із 40 – 50 пунктів [5].

Метод «гілок і границь» може бути також адаптований для розв’язання задачі розвезення [5]. Для цього створюється m копій пункту відправлення вантажу, m відповідає необхідній кількості маршрутів. Після розв’язання задачі комівояжера для такої розширеної транспортної мережі копії сполучаються в один пункт. У результаті утворюється потрібна кількість маршрутів оптимальної довжини. При необхідності в процесі побудови маршрутів на кожному кроці аналізується загальний об’єм замовлення на вантаж у пунктах, що включені у маршрут. Маршрути, у яких об’єм замовлення перевищує вантажопідйомність використовуваного транспортного засобу, блокуються.

Іноді з метою економії часу, що затрачається на розв’язання, від пошуку оптимуму відмовляються.

У роботі [10] автор пропонує наступні шляхи для зменшення витрат часу та необхідного об'єму потрібної пам'яті ЕОМ:

- відмова від пошуку точного рішення;
- заміна створення копій пункту відправлення вантажу на дозвіл багатократної появи даного пункту в маршруті;
- блокування в зведеній матриці максимальних елементів, поява яких у маршруті є малоімовірною;
- динамічне агрегування пунктів доставки.

Ще один точний метод розв'язання задачі комівояжера запропонований А.В.Крушевським [19]. Суть методу полягає в одержанні такого порядку пунктів призначення, який відповідає порядку їх проходження в маршруті мінімальної довжини. Для одержання цього порядку застосовується ітеративний процес. На кожному кроці за даними матриці $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$, що відповідає поточному порядку пунктів, обчислюються допоміжні величини:

$$l(i, j) = d_{i-1j} + d_{ij+1} + d_{j-1i} + d_{ji+1} - d_{ii+1} - d_{i-1i} - d_{j-1j} - d_{jj+1}, \\ j \neq i+1, \quad (1.12)$$

$$l(i, j) = d_{i-1i} + d_{ii+2} + d_{i+1i} - d_{i-1i} - d_{ii+1} - d_{i+1i+2}, \\ j = i+1, i, j = 2, n. \quad (1.13)$$

Величина $l(i, j)$ показує, наскільки збільшиться або зменшиться довжина маршруту при транспозиції елементів i та j .

Після обчислення величин (1.6), (1.7) відбирається множина пар елементів $\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_s, j_s)\}$, яким відповідають мінімальні оцінки

Для кожних двох пар елементів цієї множини обов'язковим є виконання умов

$$i_k \neq i_l, i_k \neq j_l, i_k \neq i_l + 1, i_k \neq j_l + 1, k, l \in \{1, 2, \dots, s\}.$$

Процес продовжується доти, поки не буде отриманий порядок елементів, що відповідає одному з отриманих раніше.

За прийнятний час за допомогою методів лінійного програмування цю задачу можна вирішити тільки при кількості пунктів транспортної мережі $n \leq 10$. Більш того, при вирішенні задачі на ЕОМ, виникає необхідність округлення шуканих величин. Це ускладнює розв'язання та спричиняє спотворення результату [21].

До задачі цілочислового лінійного програмування може бути зведена також і

задача розвезення [20]. Для одержання рішення задачі розвезення система рівнянь (1.1) – (1.3), що використовується для розв'язання задачі комівояжера, доповнюється обмеженнями, що забороняють побудову пересічних маршрутів. Це дозволяє знизити кількість необхідних обчислень і, отже, збільшити вимірність задачі, яка може бути вирішена за прийнятний час.

Через те, що застосування точних методів можливо тільки для задач невеликої вимірності (30 – 40 пунктів), більш широке застосування для розв'язання задачі розвезення здобули наближені методи.

Наближені методи пошуку рішення для задачі розвезення діляться на три групи: випадкового пошуку, локальної оптимізації та евристичні [5].

До методів випадкового пошуку відносять мікрорайонування клієнтів [22] та виділення типових ситуацій [23]. Розробка даної групи методів була обумовлена наявністю нестабільності попиту в пунктах завезення. У зв'язку з нестабільністю попиту виникає нерівномірність об'ємів і періодичності завезень, тоді як для постачальних організацій і автотранспорту бажано мати стабільні плани роботи.

Зазначені методи припускають поділ клієнтів (пунктів завезень) на групи в залежності від регулярності замовлень, що надходять від них. Для виділених типових ситуацій формується декілька можливих варіантів маршруту. Після одержання замовлення диспетчером здійснюється вибір найбільш відповідного з планів або коректування попередньо сформованих маршрутів.

Найбільш відомим методом локальної оптимізації є метод інверсій [24]. Основна ідея цього методу полягає в тому, що наявне початкове рішення розбивається на r фрагментів, що потім знову об'єднуються в один маршрут, але за допомогою ланок, відсутніх у початковому маршруті. При переборі всіх варіантів заміни r вилучених ребер, що забезпечують зменшення довжини маршруту, можна одержати такий, що не може бути поліпшений за допомогою цієї процедури. Такий маршрут називається r -оптимальним [24].

У [25] наведене дослідження 2-оптимальної процедури. За умови $r = 2$ для відновлення маршруту існують тільки дві ланки й один варіант об'єднання маршруту. При цьому один із фрагментів маршруту буде пройдений у протилежному напрямку. Якщо з маршруту вилучаються ланки $(i, i + 1)$ і $(j, j + 1)$ при $(i + 1) < j$, то відновити маршрут можна шляхом включення в нього

ланок (i, j) і $(i + 1, j + 1)$. При цьому скорочення довжини маршруту від такої операції оцінюється виразом:

$$f_i - j = \sum_{k=i+1}^{j-1} d_{k,k+1} + d_{i,i+1} + d_{j,j+1} - \sum_{k=i+1}^{j-1} d_{k+1,k} - d_{ij} - d_{i+1,j+1} \quad (5.14)$$

Вибір значення r , рівного 2, гарантує найменші витрати часу для розв'язання задачі, однак отримане рішення перевищує оптимальне на 4,5% [24].

Відповідно до [24], при виборі $r = 3$ або $r = 4$ отримане рішення відрізняється від оптимального на 1,1%. Однак при цьому значно збільшується об'єм обчислень. Якщо для 2-оптимальних планів на кожному кроці необхідно аналізувати $n(n - 3)$ варіантів заміни ланок, то для 3-оптимальних планів – уже $4n(n - 4)(n - 5)/3$ варіантів. За оцінкою [5] метод інверсій для 3-оптимальних планів вимагає в 4 рази більш трудомістких обчислень, ніж, наприклад, метод найменшої вартості, та метод Фогеля.

Моделі оптимізації перевезень найменшої вартості та по методу Фогеля.

У нашій роботі при оптимізації перевезень ми плануємо використати метод найменшої вартості та метод Фогеля, та методу потенціалів, що використовуються в транспортній задачі для визначення розподілу перевезення вантажу при мінімальних витратах. Задача комівояжера відповідає вимогам транспортної задачі, бо кількість відвідин комівояжером пунктів дорівнює кількості виїздів з них (тобто задача завжди замкнута), а функція мети теж спрямована до мінімізації витрат. Метод Фогеля в транспортній задачі часто дає оптимальний розподіл – без необхідності додаткових розрахунків за методом потенціалів.

Але в задачі комівояжера при розрахунках слід брати до уваги:

- 1) довільність уведення в комірки нульового постачання (для використання методу потенціалу);
- 2) вимогу уникнення створювання окремих розрізнених циклів у шляху комівояжера;
- 3) необхідність «заповнення відвідинами комівояжера» лише **n комірок** (у кожній колонці «заповнюється відвідинами» лише одна комірка), у той час як в транспортній задачі потрібно заповнити постачанням **$(m + n - 1)$ комірок**.

Метод Фогеля в транспортній задачі складається з визначення

штрафів комірки з мінімальним тарифом $c_{ij}^{\min 1}$ для кожного рядка та кожної колонки. Штраф рядка та колонки $Ш_{ij}$ дорівнює значенню різниці між цим мінімальним тарифом $c_{ij}^{\min 1}$ та сусіднім до нього найменшим значенням тарифу $c_{ij}^{\min 2}$ по рядку та колонці (у задачі комівояжера ці тарифи замінюються довжиною шляху між пунктами):

$$Ш_{ij} = (c_{ij}^{\min 2} - c_{ij}^{\min 1}).$$

Найбільше значення штрафу рядка чи колонки $Ш_{ij}$ визначає комірку для заповнення постачанням у транспортній задачі чи «відвідинами» комірки комівояжером. При однакових значеннях штрафів перевага надається: рядку чи колонці з меншим тарифом; якщо й тарифи однакові, перевага в транспортних задачах надається найбільшій вазі перевезення; в інших випадках комірку обирають довільно. Початковий розподіл за методом Фогеля не завжди гарантує отримання оптимального розподілу і потім повинен перевірятись на оптимум за методом потенціалів.

Але за методом Фогеля отримується принаймні не найгірший розподіл.

У кожній комірці таблиці у верхньому лівому куті вказано:

«тариф» – довжина шляху; позначкою 1 помічено комірки з реальними відвідинами комівояжером, які входять у шлях комівояжера; позначкою 0 помічені комірки з фіктивними відвідинами комівояжером, які використовуються для перевірки оптимальності задачі за методом потенціалів і не входять у дійсності в шлях комівояжера; праворуч від коми з крапкою «;» вказується потенціал «порожньої» комірки (вона не входить у сукупність комірок з реальними чи фіктивними відвідинами комівояжера).

Додатково в таблицю введені значення: $ШP_i$

$e, ШK_j$

e – штрафи рядків та

колонок; α_i, β_j – потенціали рядків та колонок для перевірки отриманого шляху комівояжера на оптимальність за методом потенціалів після отримання цього шляху за значеннями штрафів.

Матриця шляхів комівояжера для кількості пунктів $n = 4$

Алгоритм розв'язку задачі комівояжера має вигляд (табл. 21.1):

1. У кожному рядку та кожній колонці виділяємо одну незаборонену комірку з мінімальним тарифом, для цієї комірки розраховуємо штраф рядка $ШР_i$

і штраф колонки $ШК_j$

2. З отриманих штрафів $ШР_i$

і $ШК_j$

обираємо максимальне значення i

вписуємо в шлях комівояжера відповідну комірку $(i, j) = (a, b)$ з

мінімальним тарифом. Для комірки $(i, j) = (a, b)$, яка увійшла в шлях комівояжера, закреслюється рядок $i = a$ та колонка $j = b$ табл. 21.1.

3. З метою запобігання отримання окремих нез'єднаних між собою часткових циклів у шляху комівояжера вимагається, щоб у скороченній матриці шляхів кожний рядок та кожна комірка мали по одній забороненій комірці.

Використання програмного забезпечення у транспортних задачах для підприємств.

3.1 Оптимізація шляхів перевезень методами північно-західного кута та методом подвійної переваги.

Використовуючи методи економіко-математичного моделювання, здійснимо оптимізацію перевезень для конкретного підприємства, яке займається доставкою та монтажем профільних вікон- підприємство ТОВ «Інвест Буд. Вартість доставки одиниці вантажу з кожного пункту відправлення у відповідні пункти призначення задана матрицею тарифів.

Таблиця 3.1

Співвідношення потреб у доставці метало пластикових вікон підприємства ТОВ «Інвест Буд» з запасами підприємства.

	1	2	3	4	Запаси
1	6	9	1	3	150
2	4	2	10	7	145
3	8	5	3	4	182

Потреби	112	60	180	120	
---------	-----	----	-----	-----	--

Перевіримо необхідна і достатня умова розв'язання задачі.

$$\sum a = 150 + 145 + 182 = 477$$

$$\sum b = 112 + 60 + 180 + 120 = 472$$

Занесемо вихідні дані в розподільну таблицю 3.2

Таблиця 3.2

Розрахункові дані по співвідношенню запасів та потреб підприємства ТОВ «Інвест Буд»

	1	2	3	4	5	Запаси
1	6	9	1	3	0	150
2	4	2	10	7	0	145
3	8	5	3	4	0	182
Потреби	112	60	180	120	5	

1. Використовуючи *метод найменшої вартості*, побудуємо перший опорний план транспортної задачі.

Таблиця 3.3

Опорний план транспортної задачі оптимізації перевезень підприємства ТОВ «Інвест Буд» за методом найменшої вартості

	1	2	3	4	5	Запаси
1	6	9	1[150]	3	0	150
2	4[85]	2[60]	10	7	0	145
3	8[27]	5	3[30]	4[120]	0[5]	182
Потреби	112	60	180	120	5	

У результаті отриманий перший опорний план, який є допустимим, оскільки всі вантажі з баз вивезені, потреба магазинів задоволена, а план відповідає системі обмежень транспортної задачі.

Значення цільової функції для цього опорного плану одно:

$$F(x) = 1 \cdot 150 + 4 \cdot 85 + 2 \cdot 60 + 8 \cdot 27 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 120 + 0 \cdot 5 = 1396$$

2. Використовуючи *метод північно-західного кута*, побудуємо перший опорний план транспортної задачі.

Таблиця 3.4

Опорний план транспортної задачі оптимізації перевезень підприємства ТОВ «Інвест Буд» за методом «північно-західного кута»

	1	2	3	4	5	Запаси
1	6[112]	9[38]	1	3	0	150
2	4	2[22]	10[123]	7	0	145
3	8	5	3[57]	4[120]	0[5]	182
Потреби	112	60	180	120	5	

У результаті отриманий перший опорний план, який є допустимим, оскільки всі вантажі з баз вивезені, потреба магазинів задоволена, а план відповідає системі обмежень транспортної задачі.

Значення цільової функції для цього опорного плану одно:

$$F(x) = 6 \cdot 112 + 9 \cdot 38 + 2 \cdot 22 + 10 \cdot 123 + 3 \cdot 57 + 4 \cdot 120 + 0 \cdot 5 = 2939$$

3. Використовуючи *метод Фогеля*, побудуємо перший опорний план транспортної задачі. Для кожного рядка і стовпця таблиці умов знайдемо різниці між двома мінімальними тарифами, записаними в даній ладі або стовпці, і помістимо їх у відповідному додатковому стовпці або рядку.

Таблиця 3.5

Розрахункові дані по оптимізації перевезень продукції підприємства ТОВ «Інвест Буд» за методом Фогеля

	1	2	3	4	5	Запаси
1	6	9	1[150]	3	0	150
2	4[85]	2[60]	10	7	0	145
3	8[27]	5	3[30]	4[120]	0[5]	182
Потреби	112	60	180	120	5	

Зведемо всі обчислення в одну таблицю.

	1	2	3	4	5	Запаси	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	d ₅
1	6	9	1[150]	3	0	150	2	2	2	-	-
2	4[85]	2[60]	10	7	0	145	2	3	-	-	-
3	8[27]	5	3[30]	4[120]	0[5]	182	1	1	1	1	4

				1								
Потр еби	112	60	180	120	5							
d ₁	2	3	2	1	0							
d ₂	2	-	2	1	0							
d ₃	2	-	2	1	0							
d ₄	0	-	0	0	0							
d ₅	0	-	-	0	0							

У результаті отриманий перший опорний план, який є допустимим, оскільки всі вантажі з баз вивезені, потреба магазинів задоволена, а план відповідає системі обмежень транспортної задачі.

Значення цільової функції для цього опорного плану наступне:

$$F(x) = 1 \cdot 150 + 4 \cdot 85 + 2 \cdot 60 + 8 \cdot 27 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 120 + 0 \cdot 5 = 1396$$

Проведені розрахунки показали що використання методу апроксимації Фогеля призведе до отримання оптимального опорного плану задачі тобто сумарні витрати на перевезення будуть мінімальними і становитимуть 1396грн.

Здійснимо також моделювання потреб у кількості транспортних засобів та їх видів підприємства ТОВ «Інвест Буд». Відповідно обліку основних засобів, до яких належать транспортні засоби у підприємства є 8 транспортних засобів.

Відповідно теоретичних аспектів здійснення моделювання для оптимізації кількості транспортних засобів, з потребами у доставці готової продукції здійснимо наступні розрахунки, при тому, що потреба у доставці продукції з цехів у день по одному складу становить 70 од., по другому 120 одиниць і по третьому 150 одиниць. Оренда машин кожного типу складає відповідно 2,5; 4,0; 3,0; 3,2; 3,5 грн за 1 км. в день.

Математична модель задачі при використанні позначень, що прийняті для загальної моделі цієї задачі, буде мати вигляд:

$$z = 2,5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3,2x_4 + 3,5x_5 + 2y_{11} + 3y_{21} + 4y_{31} + \\ + 3y_{12} + 4y_{22} + 2y_{32} + 2y_{13} + 2y_{23} + 2y_{33} \rightarrow \min$$

$$\Omega: f_1 = 7y_{11} + 8y_{12} + 5y_{13} + 9y_{14} + 6y_{15} = 70 ,$$

$$f_2 = 15y_{21} + 10y_{22} + 15y_{23} + 5y_{24} + 30y_{25} = 120 ,$$

$$f_3 = 20y_{31} + 15y_{32} + 20y_{33} + 5y_{34} + 30y_{35} = 150 ,$$

$$f4 = x1 - (y11 + y21 + y31) \geq 0 ,$$

$$f5 = x2 - (y12 + y22 + y32) \geq 0 ,$$

$$f6 = x3 - (y13 + y23 + y33) \geq 0 ,$$

$$f7 = x4 - (y14 + y24 + y34) \geq 0 ,$$

$$f8 = x5 - (y15 + y25 + y35) \geq 0 ,$$

$$x_j \geq 0, x_j = \text{int}, j = 1, 5 ,$$

$$y_{ij} \geq 0, y_{ij} = \text{int}, i = 1, 3; j = 1, 5 .$$

Розрахунки здійснимо з використанням прогами Excel, та візуально представимо на рис. 3.4-3.5.

Оптимальний розв'язок задачі складається з вектор-рядка:

$$X^{*T} = [10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 9] \text{ і матриці } Y^* = \begin{matrix} & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{matrix}$$

Компоненти вектору X^* свідчать про те, що за умовами задачі оптимальний варіант парку машин повинен складатися з 10 машин. Такий вибір і розподіл парку машин забезпечує мінімальні витрати на виконання всіх перевезень у розмірі $z^* = 98,5$ тис. ум. од.

Застосування сучасного програмного забезпечення у вирішенні оптимізації перевезень підприємства.

Для розрахунків оптимальних шляхів перевезення металопластикових вікон для конкретного підприємства ТОВ «Інвест-Буд» застосовується програма Excel, надбудову «Пошук рішення». Візуальне представлення розрахунків, здійснене в програмному забезпеченні Excel представимо у наступних таблицях.

Використання методів лінійного програмування в розв'язанні задач управління підприємством на прикладі ТОВ «Інвест-Буд». Вирішення поставленого завдання зобразимо у вигляді рис. 3.1-3.3

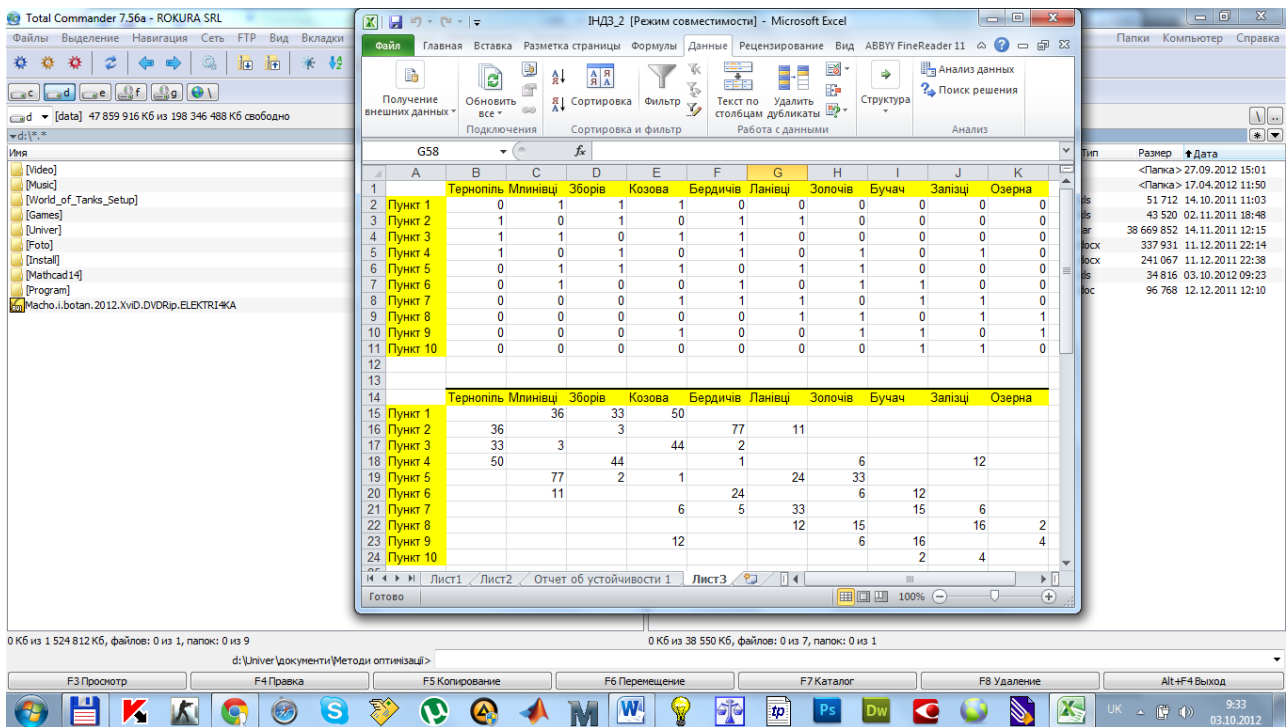


Рис.3.1. Програмна реалізація в Excel розрахунків оптимізації транспортних перевезень ТОВ «Інвест-Буд» методом найменшої вартості.

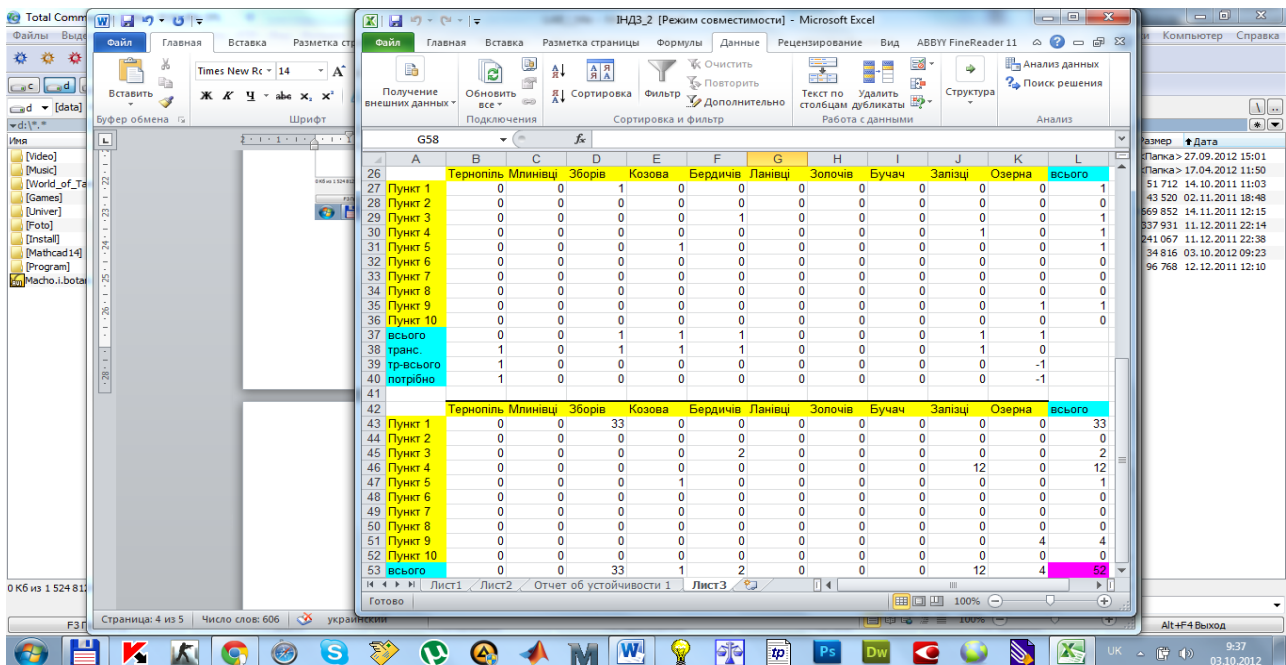


Рис3.2. Програмна реалізація в Excel розрахунків оптимізації транспортних перевезень ТОВ «Інвест-Буд» методом північно-західного кута.

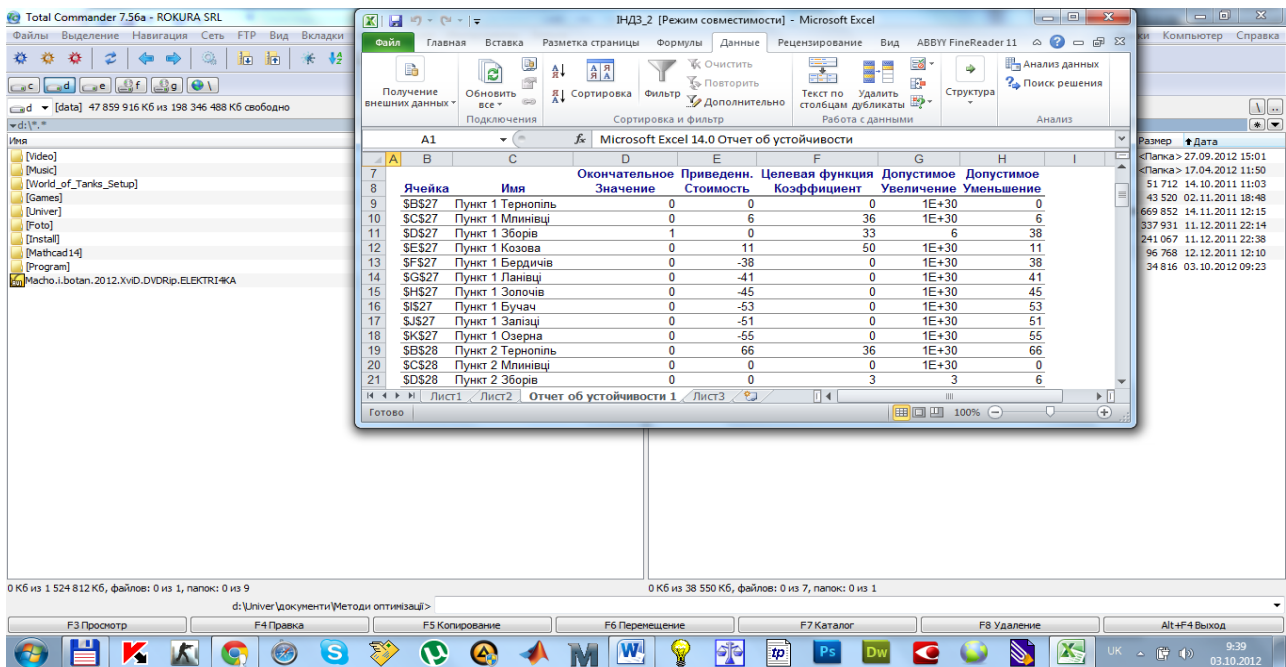


Рис.3.3 Програмна реалізація в Excel розрахунків оптимізації транспортних перевезень ТОВ «Інвест-Буд» за методом Фогеля.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
2	Задача про формування парку машин та їх розподіл (схема "один до багатьох")															
3														$[a_{ij}]$	=	$[b_i]$
4		7	8	5	9	6		2,00	3,00	2,00	4,00	3,00		0	=	70
5	$[a_{ij}]$ =	15	10	15	5	30	$[c_{ij}]$ =	3,00	4,00	2,00	3,00	3,00		0	=	120
6		20	15	20	5	30		4,00	2,00	2,00	1,00	2,00		0	=	150
7																
8	$[d_j]$ =	2,50	4,00	3,00	3,20	3,50										
9																
10	$[x_j]$ =	0	0	0	0	0		0,00	+	0,00	=	0,00				
11																
12		0	0	0	0	0										
13	$[y_{ij}]$ =	0	0	0	0	0										
14		0	0	0	0	0										
15																
16		0	0	0	0	0	>=	0								
17																
18																

Рис.3.4. Розрахунок оптимізації кількості транспортних засобів підприємства ТОВ «Інвест-Буд» в програмі Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
2	Задача про формування парку машин та їх розподіл (схема "один до багатьох")																
3													$[a_{ij}]$	$[b_i]$			
4		7	8	5	9	6		2,00	3,00	2,00	4,00	3,00	70	=	70		
5	$[a_{ij}]$	15	10	15	5	30	$[c_{ij}]$	3,00	4,00	2,00	3,00	3,00	120	=	120		
6		20	15	20	5	30		4,00	2,00	2,00	1,00	2,00	150	=	150		
7																	
8	$[d_j]$	2,50	4,00	3,00	3,20	3,50											
9																	
10	$[x_j]$	10	0	0	0	9		56,50	+	42,00	=	98,50	$\leftarrow Z_{min}$				
11																	
12		10	0	0	0	0											
13	$[y_{ij}]$	0	0	0	0	4											
14		0	0	0	0	5											
15																	
16		0	0	0	0	0	\geq	0									
17																	
18																	

Рис.3.5 Вихідні параметри транспрної задачі по оптимізації кількості транспортних засобів підприємства ТОВ «Інвест-Буд».

Сучасне конкурентне ринкове середовище потребує застосування сучасних методів управління економічними процесами на підприємстві, одним з таких методів є методи лінійного програмування. За допомогою пакету прикладних програм *Microsoft Office*, зокрема програми Excel, надбудови «Пошук рішення» побудовано модель пошуку найкоротшого шляху між пунктами призначення при доставці готової продукції ТОВ «Інвест-Буд», що дозволяє суттєво скоротити час на розрахунки, а отже і вчасність при прийнятті рішеннями керівниками підприємства ТОВ «Інвест-Буд», та дозволить більш якісно та в набагато коротші строки виконати замовлення клієнтам підприємства, яке обслуговує багато районів Тернопільської області, та посилити становище підприємства на ринку надання послуг у встановленні метало пластикових вікон, адже даний ринок є дуже високо конкурентним, і оптимізація перевезень фірми, дозволить скоротити час та кошти на доставку металопластикових вікон по Тернопільській області.

Лекція 6. МАРКОВСЬКИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС З ДИСКРЕТНИМИ СТАНАМИ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ В СУЧАСНИХ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСАХ.

Прогнозування як науковий метод передбачення стану певного об'єкта або процесу та шляхів досягнення цього стану, сформувалось на початку ХХ ст. Роль прогнозування стану економічних систем і процесів значно зросла в останні роки зі становленням ринкових відносин в Україні. Прогнозування стало невід'ємною складовою індикативного планування і перетворилось в одну із функцій управління.

Бізнес-планування та формування виробничої програми підприємства ґрунтується на вивченні та прогнозуванні попиту та пропозиції. Визначення обсягів та структури продаж, сегментів ринків збуту, своїх ніш у цих сегментах має для підприємства першочергове значення, а проблема прогнозування попиту та пропозиції була, є і ще довго залишиться актуальною. Питанням розробки методичних основ прогнозування, його формалізації та адаптації в конкретних ринкових умовах присвячена велика кількість наукових робіт вітчизняних та зарубіжних вчених, таких як акад. Геєц В.М. та його учнів [2 – 8].

З типологією прогнозування тісно пов'язане питання джерел інформації про майбутнє. Розрізняють три основних джерела прогнозованої інформації: накопичений досвід, який базується на знаннях закономірностей протікання і розвитку досліджуваних явищ, процесів, подій; екстраполяція існуючих тенденцій, закон розвитку яких в минулому і сучасному досить відомий; побудова моделей прогнозованих об'єктів відповідно до очікуваних або передбачуваних умов.

Відповідно до цих джерел інформації виділяють три взаємодоповнюючих один одного методи прогнозування: експертний, екстраполяції та моделювання. Експертний метод прогнозування за рівнем формалізації відноситься до інтуїтивних методів, а метод екстраполяції та моделювання – до формалізованих.

Сучасний апарат прогнозування по оцінках зарубіжних та вітчизняних авторів нараховує більше 150 методів. Серед цих методів найбільш розроблений метод екстраполяції, який включає такі методи екстраполяції: метод безпосередньої екстраполяції, лагова (випереджаюча) екстраполяція числових тенденцій, методи екстраполяції по огинаючих кривих, кореляційні і регресійні методи.

В роботах вітчизняних та зарубіжних вчених майже не приділялась увага методу прогнозування економічних і соціальних процесів ланцюгами Маркова з дискретними станами.

Необхідно відмітити, що більшість економічних і соціальних процесів розвиваються як випадкові процеси під дією випадкових факторів. Щоб спрогнозувати майбутній стан цих процесів, необхідно побудувати їх ймовірнісну модель.

Випадковий процес, що протікає в системі S , називається марківським процесом, якщо для кожного моменту часу t_0 ймовірність будь-якого стану системи в майбутньому (при $t > t_0$) залежить тільки від її стану в теперішньому часі (при $t = t_0$) і не залежить від того, коли і як система прийшла в цей стан. Іншими словами в марківському випадковому процесі майбутній стан системи залежить від теперішнього часу і не залежить від «передісторії» процесу. Найбільший інтерес для економічного прогнозування являє марківський випадковий процес (ланцюги

Маркова) з дискретними станами. Будемо вважати, що для кожного стану системи відомі ймовірності переходу в інший стан за один крок. Позначимо через p_{ij}

ймовірність переходу системи S зі стану i в стан j за проміжок часу від t_0 до t . Нехай система S має n можливих станів S_1, S_2, \dots, S_n . Запишемо перехідні ймовірності p_{ij} у вигляді матриці переходу $\|p_{ij}\|$:

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2j} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Сума всіх елементів кожного рядка матриці дорівнює 1, тобто

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad (2)$$

оскільки за інтервал часу t ланцюг Маркова зі стану i обов'язково перейде в один із допустимих станів j .

Квадратна матриця $\|p_{ij}\|$ називається стохастичною, оскільки всі її елементи не від'ємні, а сума всіх елементів кожного рядка матриці дорівнює одиниці. Щоб повністю задати марковський ланцюг, необхідно крім матриці перехідних ймовірностей мати вектор початкового стану системи p_i . Вектор-рядок p_i називається ймовірнісним вектором. Очевидно, що всі елементи вектора невід'ємні, а сума елементів дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}(t_0) = 1. \quad (3)$$

Початковий стан системи можна задати за допомогою ймовірнісного вектора-рядка, один із елементів якого дорівнює 1, а всі інші елементи рівні 0.

Доказано, що вектор ймовірностей ланцюга Маркова в момент t дорівнює добутку вектора ймовірностей в початковий момент t_0 на матрицю переходу, тобто

$$p(t) = p(t_0) * \|p_{ij}\| \quad (4)$$

Графічно представити перехід системи S_0 в стани S_1, S_2, \dots, S_n можна, побудувавши дерево логічних можливостей.

Не дивлячись на логічність та простоту методу, його застосування на практиці ускладнюються відсутністю необхідної інформації в статистичній та бухгалтерській звітності підприємств. Основним джерелом вхідних даних є аналітично-пошукове та метод експертних оцінок. Хоч експертні оцінки в якійсь мірі є суб'єктивними, але вони дозволяють одразу отримати значення ймовірностей вектора та матриці переходу.

За даними експертних оцінок складемо матрицю переходу. Дослідимо попит на три види конкуруючих виробів x_1, x_2, x_3 . В момент часу t_0 було опитано 1000

респондентів. Виявилось, що виріб x_1 купують 500, виріб x_2 – 200, а виріб x_3 – 300 покупців. Позначимо через $p(t_0)$ статистичну ймовірність купівлі виробу x_1 в момент часу t_0 , тоді вектор ймовірностей буде мати вид:

$$p(t_0) = (0,5; 0,2; 0,3).$$

Будемо вважати, що поведінка покупців в кожному наступному місяці обумовлена тільки їх поведінкою в попередньому місяці, тобто має місце ланцюг Маркова. Через місяць виявилось, що з 500 покупців, що купляли виріб x_1 , 450 продовжують його купляти, 40 покупців стали купляти виріб x_2 і 10 – виріб x_3 . Тоді статистичні ймовірності: $p_{11}=450/500=0,9$; $p_{12}= 40/500=0,08$; $p_{13} = 10/500=0,02$.

З 200 покупців, що купляли виріб x_2 , 60 чоловік продовжують його купляти, 80 стали купляти виріб x_1 , 60 – виріб x_3 . Статистичні ймовірності: $p_{21}= 80/200 = 0,4$; $p_{22} = 60/200 = 0,3$; $p_{23} = 60/200 = 0,3$.

З 300 покупців, що купляли виріб x_3 , 60 чоловік продовжують його купляти, 210 чоловік стали купляти виріб x_1 , 30 чоловік – виріб x_2 . Статистичні ймовірності: $p_{31} = 210/300 = 0,7$; $p_{32} = 30/300 = 0,1$; $p_{33} = 60/300 = 0,2$.

Побудуємо дерево логічних можливостей, знайдемо ваги гілок та ваги шляхів (рис. 1).

Сформуємо матрицю переходу $\|p_{ij}\|$ та визначимо, який виріб буде користуватися найбільшим попитом через місяць.

$$p(t) = p(t_0) * \|p_{ij}\| = (0,5; 0,2; 0,3) * \begin{pmatrix} 0,9 & 0,08 & 0,02 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = (0,74; 0,13; 0,13).$$

Отже, через місяць найбільший попит буде мати виріб x_1 . Вважаючи, що ланцюг Маркова однорідний по часу, тобто стратегія покупців не зміниться, можна розрахувати, який виріб буде мати найбільший попит через тривалий період часу.

Визначимо вектор граничних ймовірностей як добуток вектора ймовірностей в початковий момент t_0 на матрицю переходу, тобто:

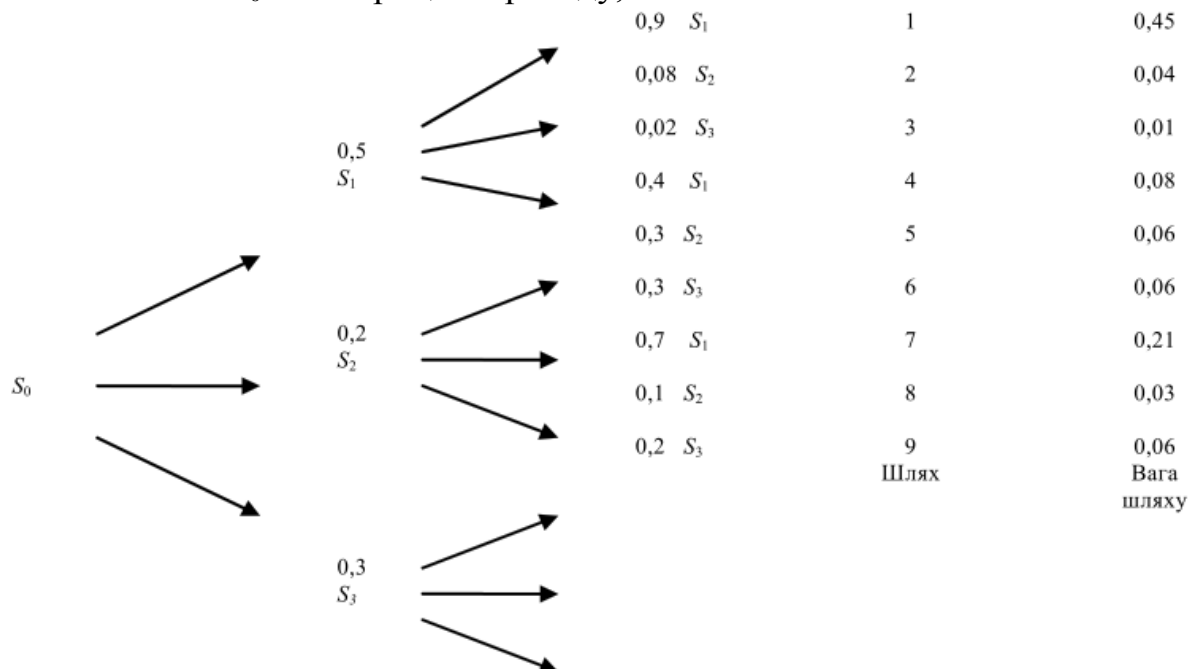


Рис. 1. Дерево логічних можливостей

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) = (p_1, p_2, \dots, p_n) * \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{n1} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Тоді:

$$\begin{cases} p_1 = p_1 * p_{11} + p_2 * p_{21} + \dots + p_n * p_{n1} \\ p_2 = p_1 * p_{12} + p_2 * p_{22} + \dots + p_n * p_{n2} \\ \dots \\ p_n = p_1 * p_{n1} + p_2 * p_{n2} + \dots + p_n * p_{nn} \end{cases} \quad (6)$$

Підставимо значення ймовірностей в систему (6). Отримаємо:

$$\begin{cases} p_1 = p_1 * 0,9 + p_2 * 0,4 + \dots + p_n * 0,7 \\ p_2 = p_1 * 0,08 + p_2 * 0,3 + \dots + p_n * 0,1 \\ p_3 = p_1 * 0,02 + p_2 * 0,3 + \dots + p_n * 0,2 \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) лінійно залежна. Для її розв'язання третє рівняння замінимо рівнянням

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Отримаємо систему :

$$\begin{cases} p_1 = p_1 \cdot 0,9 + p_2 \cdot 0,4 + p_3 \cdot 0,7 \\ p_2 = p_1 \cdot 0,08 + p_2 \cdot 0,3 + p_3 \cdot 0,1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \quad (8)$$

Рішення системи: $p_1 = 0,84$; $p_2 = 0,10$; $p_3 = 0,06$. Отже, через довгий період часу найбільший попит буде мати виріб x_1 .

Знаючи початковий стан системи (вектор ймовірностей $p(t_0)$) та матрицю переходу $\|p_{ij}\|$, можна знайти вектори імовірності стану системи $p(t_k)$ через k кроків : $p(t_k) = p(t_{k-1}) * \|p_{ij}\|$.

В нашому випадку граничні імовірності будуть досягнуті, починаючи з шостого кроку ($k=6$). Тобто через шість місяців попит на вироби x_1 , x_2 , x_3 стабілізується, а імовірності купівлі виробів складуть: $P_1=0,84$;

$P_2=0,10$; $P_3=0,06$.

	P_1	P_2	P_3
$K=1$	0,5	0,2	0,3
$K=2$	0,74	0,13	0,13
$K=3$	0,809	0,1112	0,0798
$K=4$	0,82844	0,10606	0,0655
$K=5$	0,83387	0,104643	0,061487
$K=6$	0,835381	0,104251	0,060368
$K=7$	0,835801	0,104143	0,060057
$K=8$	0,835917	0,104113	0,05997
$K=9$	0,83595	0,104104	0,059946
$K=10$	0,835959	0,104102	0,059939

Можлива інша постановка проблеми. Нехай попит на певний товар за даними експертних оцінок може оцінюватись станами: значний, змінний, спадаючий, понижений та відсутність попиту. Якщо у початковий момент попит значний, то імовірності станів попиту складуть: (0,42; 0,15; 0,20; 0,15; 0,08); аналогічно отримаємо імовірності станів попиту при змінному, спадаючому, пониженому попитах та відсутності попиту. За даними опитування експертів сформуємо матрицю переходу:

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} 0,42 & 0,15 & 0,2 & 0,15 & 0,08 \\ 0,28 & 0,25 & 0,24 & 0,13 & 0,10 \\ 0,26 & 0,18 & 0,26 & 0,18 & 0,12 \\ 0,14 & 0,16 & 0,23 & 0,25 & 0,22 \\ 0,16 & 0,11 & 0,25 & 0,28 & 0,20 \end{vmatrix}$$

Будемо вважати, що в початковий момент часу система буде знаходитись в стані S_0 (попит значний). Імовірність стану $p_{(0)}=1$. Запишемо вектор початкових станів: $p_{(0)}=(1;0;0;0;0)$. Тоді вектор станів через один крок:

$$P_{(1)} = P_{(0)} \cdot P_{ij} = |1;0;0;0;0| \cdot \begin{vmatrix} 0,42 & 0,15 & 0,2 & 0,15 & 0,08 \\ 0,28 & 0,25 & 0,24 & 0,13 & 0,10 \\ 0,26 & 0,18 & 0,26 & 0,18 & 0,12 \\ 0,14 & 0,16 & 0,23 & 0,25 & 0,22 \\ 0,16 & 0,11 & 0,25 & 0,28 & 0,20 \end{vmatrix} = |0,42;0,15;0,2;0,15;0,08|.$$

Імовірності станів попиту через сім кроків показують, що марковський стохастичний процес стабілізувався уже на п'ятому кроці. Отже, через п'ять кроків ймовірність того, що попит буде значним

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
K=1	0,42	0,15	0,2	0,15	0,08
K=2	0,3	0,17	0,23	0,18	0,12
K=3	0,28	0,17	0,23	0,19	0,13
K=4	0,27	0,17	0,23	0,19	0,13
K=5	0,27	0,17	0,23	0,19	0,14
K=6	0,27	0,17	0,23	0,19	0,14
K=7	0,27	0,17	0,23	0,19	0,14

складає 0,27, змінним – 0,17, спадаючим – 0,23, пониженим – 0,19, відсутність попиту – 0,14. Виразимо імовірності станів попиту в днях року. Значний попит буде тривати 99 днів, змінний попит – 62 дні, спадаючий – 85 днів, понижений – 69 днів, відсутність попиту – 50 днів. Отримана інформація дозволить підприємству розробити певну стратегію стабілізації попиту.

Таким чином, проблема прогнозування актуальна та складна. Для її вирішення останнім часом з'явилися нові методи прогнозування (теорія нечітких множин, нейронні мережі та ін.).

Лекція 7. ТЕОРІЯ НЕЧІТКИХ МНОЖИН У МОДЕЛЮВАННІ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ.

Альтернативним способом моделювання у вивченні процесів оцінки

ефективності застосування інвестиційних проектів і взагалі у вивченні складних систем є допущення нечіткої та у певній мірі розмитості при описі певних параметрів, показників та характеристик. Це припущення ґрунтується на принципі несумісності, суть якого полягає у тому, що із зростанням складності системи, здатність робити точні і змістовні твердження про їх поведінку знижується до певної межі, за якою такі характеристики як точність і змістовність стають взаємовиключними. З цих причин абсолютно точний кількісний аналіз реально складних об'єктів далеко не завжди є обґрунтованим.

Підхід до вирішення аналітичних економічних задач вироблення управлінських рішень через названі причини повинен спиратись на те, що в такому аналізі ключовими моментами є не числа, а деякі нечіткі множини їх значень, причому для елементів цих множин перехід від належності до неналежності є неконтрастним а поступовим.

Справді, якщо звернути увагу на природу міркувань людини, то вона не є звичайною двозначною чи навіть багатозначною логікою [112, с. 109]. Ця логіка є логікою з нечіткими істинами, відносинами та правилами висновку. Саме така логіка є найважливішим компонентом однієї з головних особливостей людського мислення – узагальнювати інформацію та виділяти тільки впливові показники для вирішення конкретних задач. Така здатність людського розуму дозволяє виробляти ефективні рішення людиною у конкретних ситуаціях і не врахування цього при створенні прикладного математичного і програмного забезпечення у прогнозуванні багато у чому пояснює невдачі у створенні ефективних технологій прийняття управлінських рішень в економіці.

Як зазначалося вище, необхідною умовою для створення математичного інструментарію та комп'ютерних технологій розв'язання аналітичних задач прогнозування, вироблення управлінських рішень стосовно складних економічних об'єктів та процесів є врахування та оцінка невизначеності інформації. Ефективність обліку невизначеності інформації прямо залежить від вибору математичного фундаменту, обґрунтованого математичною теорією.

Існує ряд теорій, призначених для формалізації невизначеної інформації: теорія імовірності, теорія похибок, теорія суб'єктивних імовірностей, теорія інтервальних середніх, багатозначна логіка, теорія нечітких множин (нечіткої

логіки).

Порівняння математичних теорій з точки зору можливостей їх застосування для пошуку розв'язків розглянутих вище аналітичних задач подає В. П. Бочорникович [113, с. 10]. Результати цього налізу показують, що однією з найбільш ефективних математичних теорій, спрямованих на формалізацію і опрацювання невизначеності інформації, є теорія нечітких множин, яка багато у чому інтегрує відомі підходи і методи. Ця математична теорія з єдиних позицій дозволяє розглянути різні види невизначеності, використовуючи можливості інших теорій і одержати якісно новий, кращий результат.

Зупинимось детальніше на характеристиці нечіткої логіки. Суть цієї технології полягає у тому, що вона дозволяє вирішувати широке коло задач прийняття рішень за допомогою сукупності теоретичних основ, методів, алгоритмів, процедур і програмних засобів, які ґрунтуються на використанні нечітких знань та оцінок експертів.

Нечіткі технології ефективні там, де немає можливості чітко формалізувати показники, де переважає експертна лінгвістична вербальна інформація. Наприклад, числові показники дослідження успішного впровадження інвестиційних проектів по регіонах України можуть бути неточно представлені, описово(наприклад інвестиційна привабливість Чернігівського та Черкаських регіонів є низькою від 27 %до 35 %, при нижчій за середньо платоспроможність населення цих регіонів від 898 грн. до 962 грн.). Для можливості подання такої інформації визначається функція поділу впевненості в істинності значення числа. Нечіткий показник таким чином, може бути отриманий словесно, відображений графічно у вигляді функції чи графіка у двовимірному просторі.

Таким чином числова величина, яка має конкретний фізичний зміст для аналітика перестає бути однозначною, тобто мати одне значення (чого вимагають класичні кількісні методи), а може виражатись набором значень, кожне з своєю впевненістю, яка відображає темп діючих факторів. Тракткування нечітких величин визначається в кожному конкретному випадку окремо і залежить від фізичної сутності цих величин, а також від чинників що на них впливають.

Одержані у результаті «не цілком точних замірів» нечіткі величини багато в чому аналогічні розподілам теорії ймовірностей, але позбавлених властивостей

останнім недоліком таких як: мала кількість придатних до аналізу функцій розподілу, необхідність їхньої нормалізації, дотримання вимог адитивності, трудність обґрунтування адекватності математичної абстракції для опису поведінки фактичних величин. Нечітка логіка, при зростанні точності, у границі приходить до булевої логіки. У порівнянні з імовірнісними методами, методи нечіткої логіки дозволяють різко скоротити обсяг необхідних обчислень, що у свою чергу призводить до покращення реакції нечітких систем [151, с. 10].

Для оцінки успішної реалізації інвестиційних проектів в умовах невизначеності пропонується використовувати аналітичний апарат теорії нечіткої логіки, основними перевагами у вирішенні задач якого є можливість:

- користуватися даними, заданими нечітко (статистичні опитування та ін.);
- нечіткої формалізації критеріїв оцінки і порівняння (оперування критеріями «більшість», «можливо», «переважно» і ін.);
- проведення якісного оцінювання як вхідних даних, так і вихідних результатів;
- проведення швидкого моделювання складних динамічних систем і їх порівняльний аналіз із заданим ступенем точності.

Оперуючи принципами поведінки систем, описами нечіткими методами, по-перше – економиться час на зв'язування логічних значень параметрів і упорядкування математичних залежностей, що їх описують, по-друге – можна оцінити різні варіанти початкових значень.

Основні макроекономічні показники, за допомогою яких характеризуються економічні процеси, з огляду на їх призначення, стосовно оцінки ефективності реалізації інвестиційних проектів поділяються на дві групи, а саме: показники, що визначають кількісні параметри і характеризують ситуації розвитку, та показники, за допомогою яких відображають якісні характеристики. При аналізі економічних процесів дуже важливим є поєднання обох груп, особливо при застосуванні економетричних моделей. Без такого поєднання ці моделі не будуть адекватно відображати реальну дійсність, тобто економічну ситуацію, що має місце [157, с. 141].

Для оцінки успішної реалізації інвестиційних проектів або сценаріїв з використанням при цьому інструментарію математичного моделювання вимагає

поєднувати у моделях як статистику, так і експертну інформацію. А це є можливим при використанні нечіткої логіки [153, с. 72].

Основними споживачами нечіткої логіки на економічному просторі є банкіри, фінансисти, а також фахівці в області політичного й економічного аналізу. Вони використовують програмні продукти, що базуються на теорії нечіткої логіки для створення моделей різних економічних, політичних, біржових ситуацій.

Без застосування нечіткої логіки немислимі сучасні ситуаційні центри керівників західних країн, у яких приймаються ключові політичні рішення і моделюються всілякі кризові ситуації. Одним із вражаючих прикладів масштабного застосування нечіткої логіки стало комплексне моделювання системи охорони здоров'я і соціального забезпечення Великобританії (National Health Service – NHS), що вперше дозволило точно оцінити й оптимізувати витрати на соціальні нестатки.

Не обійшли засоби нечіткої логіки і програмні системи, що обслуговують великий бізнес. Першими, зрозуміло, були фінансисти, задачі яких вимагають щоденного прийняття правильних рішень у складних умовах непередбаченого ринку. Перший рік використання системи Fujii Bank приносив банку в середньому 7,7 млн. дол. США на місяць. Однак можна з упевненістю сказати, що епоха розквіту прикладного використання нечіткої логіки на вітчизняному ринку ще попереду.

Прогнозування наслідків рішень, що ґрунтуються на нечіткій вхідній інформації та при відсутності аналітичної залежності між вхідними та вихідними параметрами найбільше пристосований математичний апарат теорії нечітких множин. Він дозволяє формалізувати за допомогою математичного апарату нечіткої логіки зв'язки між шуканими параметрами, та факторами, що впливають на них. Застосування теорії нечітких множин дозволяє описати ці зв'язки природною мовою, звільняючи дослідження від трудомістких процедур побудови функціональних залежностей.

База знань, на основі якої пропонується оцінювання успішної реалізації інвестиційних проектів, формується експертами у результаті оцінки відповідних причинно-наслідкових зв'язків.

В одній з основних своїх праць Л. Заде запропонував при створенні моделей на основі теорії нечітких множин використовувати такі поняття [72, с. 68-72]:

1. Універсальна множина U – повна множина, що охоплює всю проблемну область.

2. Нечітка множина F на універсальній множині U – це сукупність пар $(\mu_F(u), u)$, де $\mu_F(u)$ – рівень належності елемента $u \in U$ до нечіткої множини F . Цей рівень задається в діапазоні $[0,1]$. Елемент u з більшим рівнем належності має більшу відповідність властивостям нечіткої множини F .

3. Функція належності $\mu_F(u)$ відображає рівень належності кожного елемента універсальної множини U нечіткій множині F і набуває значень від 0 до 1.

У випадку скінченного числа елементів множини $U = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ нечітку множину F можна записати у вигляді:

$$F = \sum_{i=1}^m \mu_F(u_i) / u_i. \quad (6.1)$$

У випадку неперервної множини U нечітка множина F матиме вигляд:

$$F = \int_u \mu_F(u) / u. \quad (6.2)$$

4. Лігвістична змінна – це змінна, значення якої є слова або словосполучення деякої природної чи штучної мови.

5. Терм-множина – це множина, елементами якої є всі можливі значення лінгвістичної змінної.

6. Терм – це елемент терм-множини.

Основними операціями у теорії нечітких множин, що застосовуються у моделюванні є:

1. Операція доповнення множини F :

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^m \{1 - \mu_F(u_i)\} / u_i, \quad (6.3)$$

де

$$1 - \mu_F(u) = \mu_{\bar{F}}(u). \quad (6.4)$$

2. Операція об'єднання множин:

$$R \cup G = \sum_{i=1}^m \{\mu_R(u_i) \cup \mu_G(u_i)\}, \quad (6.5)$$

де

$$\mu_R(u_i) \cup \mu_G(u_i) = \mu_{R \cup G}(u_i), \quad (6.6)$$

\cup - знак оператора взяття максимуму.

3. Операція перетину множин:

$$R \cap G = \sum_{i=1}^m \{ \mu_R(u_i) \cap \mu_G(u_i) \}, \quad (6.7)$$

де

$$\mu_R(u_i) \cap \mu_G(u_i) = \mu_{R \cap G}(u_i), \quad (6.8)$$

\cap - оператор взяття мінімуму.

Дані операції використовуються при складанні нечітких логічних рівнянь. Операції взяття максимуму чи мінімуму відповідають логічним операціям «або» та «і» у чіткій логіці.

Знаючи про причинно-наслідковий зв'язок двох факторів, наприклад, «якщо R то G», що використовують нечіткі множини $R \subset U$, $G \subset V$, можна виконати нечіткий логічний висновок $R \rightarrow G, R' \rightarrow G'$. Який означає, що у випадку якщо з факту R слідує фактор G, то з факту R' слідує факт G' , де R, G, R' , G' – нечіткі множини [114].

Таким чином складається база знань, за допомогою якої виконується апроксимація залежності $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що має назву нечіткого логічного висновку.

Для виконання операцій нечіткого логічного висновку необхідно знати нечітке відношення між множинами. Нечітке відношення між множинами $R \subset G$, $G \subset V$, що задані на універсальних множинах $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ і $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, визначається матрицею що має такий вигляд:

$$Y = R \times G = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \{ \mu_R(w_i) \cap \mu_G(v_j) \}. \quad (6.9)$$

Враховуючи досвід застосування математичного апарату нечіткої логіки у задачах медичної діагностики [149, с. 124-128], побудови багатфакторних залежностей для процесів біоконверсії [150, с. 53] та в інших задачах моделювання. Для нашої задачі ефективного впровадження інвестиційних проектів можна застосовувати розроблені раніше науково-методичні принципи:

1. Принцип лінгвістичності змінних систем у відповідності до якого вхідні і

вихідні параметри створеної моделі будемо вважати як лінгвістичні змінні з якісними термами (значеннями, що приймають змінні).

Прикладами лінгвістичних термів є :

- зовнішні чинники, що впливають на економіко-політичну ситуацію (низькі, середні, високі);
- внутрішньо-політична ситуація в країні(нестабільна, стабільна);
- природні умови (негативні, нормальні, сприятливі);
- політика Держкомзв'язку та інформатизації, та інших керуючих органів (повне регулювання, часткове регулювання).

Змінні, що розглядаються, можуть мати конкретні числові значення. Але для конкретно взятої задачі особливу роль відіграють лінгвістичні терми. Це пов'язано з тим, що такі терми більш природні для спеціалістів-експертів, на знаннях яких базується модель [121].

2. Принцип лінгвістичності знань про прийняття конкретних рішень, у відповідності до якого причинно наслідкові зв'язки між вхідними та вихідними параметрами описуються природною мовою, а потім формалізуються у вигляді сукупності нечітких логічних висловлювань типу «якщо-то, інакше». Такі висловлювання можна розглядати як набір точок у просторі «вхідні параметри вихідні параметри». По цих точках будується поверхня, яка дає можливість оцінювати значення вихідної змінної при таких значеннях вхідних параметрів, знання про яких в базі відсутні.

3. Принцип ієрархічності знань про рішення [152, с. 17-19]. Перші два принципи дають можливість описати причинно-наслідкові зв'язки між вхідними та вихідними параметрами. Застосування принципу ієрархічності дозволяє уникати труднощів, породжувати розмірністю системи (кількістю вхідних параметрів). У відповідності до цих принципів можна провести класифікацію вхідних параметрів і побудувати дерево виведення [25, с. 318]. Цей принцип дозволяє врахувати практично необмежену кількість вхідних параметрів, які мають вплив на рішення.

Створення моделі функцій належності забезпечують подання кількісних і якісних параметрів у вигляді нечітких множин для лінгвістичних термів, які є у базі знань [25, с. 323].

Теорію нечітких множин можна використати для дослідження найбільш

сприятливих регіонів України для впровадження інвестиційних проектів та стратегій в галузі зв'язку та в інших галузях.

У моделі використовуються параметри у якісному та кількісному вимірі. Рівень ефективності реалізації інвестиційних проектів будемо визначати в таких діапазонах: γ_1 - високий (від 80% до 100%); γ_2 - вище за середній (від 60% до 80%); γ_3 - середній (від 40% до 60%); γ_4 - нижче за середній (від 20% до 40%); γ_5 - низький (від 0% до 20%). Вказані параметри $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ будемо називати рівнями ефективності інвестування, а результатом модельних експериментів буде відсоткова зміна (від 0% до 100%).

Нечіткі множини у спеціальній літературі задають як пару $\bar{A} = \{x \in X, \mu_{\bar{A}}(x)\}$, де $\mu_{\bar{A}}(x)$ – функція, що визначає ступінь належності x до \bar{A} . Формально, функція належності є відображенням: $\mu_{\bar{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$, де X називається носієм нечіткої множини та за умови $\sup \mu_{\bar{A}}(x) = 1$ – відповідна нечітка множина називається нормальною. Також у теорії нечітких множин часто використовують метод опису нечітких множин за допомогою α -рівневих множин, які є підмножинами базової множини X та описуються так: $\bar{A}[\alpha] = \{x | \mu_{\bar{A}}(x) \geq \alpha\}$ для всіх значень $\alpha \in [0,1]$. Функція належності, у загальному випадку, є формалізованим описом ступеня присутньої нечіткості на деякій множині, яка, у свою чергу, являє собою носій нечіткої величини.

Математичне моделювання з використанням засад нечіткої логіки потребує здійснити вибір методу побудови функцій належності (ФН), які забезпечать формалізацію нечітких термів. Теорія нечітких множин дає можливість використовувати різні методи побудови функцій належності. Тому доцільно виділити ряд критеріїв, що допомогли б вирішити питання побудови функцій належності. Конкретний вид функцій належності визначається на основі різних додаткових припущень про властивості цих функцій (симетричність, монотонність, неперервність першої похідної тощо) з урахуванням специфіки наявної невизначеності та реальної ситуації. Зокрема, нечіткі числа з трикутною функцією належності $\mu(t)$ називаються трикутними нечіткими числами і позначаються $\bar{t} = (t_{\min}, t_c, t_{\max})$, де t_{\min}, t_{\max}, t_c – відповідно мінімальне, максимальне значення і

деяка оцінка центрального значення (математичного сподівання, моди, медіани тощо) окремого параметра та мають функцію належності:

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{\min}}{t_c - t_{\min}}, & \text{для } t_{\min} \leq t \leq t_c \\ \frac{t - t_{\max}}{t_c - t_{\max}}, & \text{для } t_c \leq t \leq t_{\max} \end{cases} \quad (6.10)$$

Нечіткі числа з трапецієподібною функцією належності $\mu(t)$ окремого параметра, де a, c, d, t – відповідно вершини трапеції, мають такий математичний запис функції належності:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \leq a \\ \frac{t - a}{c - a}, & \text{якщо } a \leq t \leq c \\ 1, & \text{якщо } c \leq t \leq d \\ \frac{b - t}{b - d}, & \text{якщо } d \leq t \leq b \\ 0, & \text{якщо } t \geq b \end{cases} \quad (6.11)$$

Крім трапецієвидної форми, є ще квазіподібна ФН, яка також може застосовуватись при будь-якій кількості термів і використовується у системах з налагодженням через навчальну вибірку. Кусково-лінійна апроксимація, як правило, найбільш точно описує реальну функцію належності, побудовану на статистичних показниках, але вона не дозволяє проводити налагодження. Успішно її можна використати у випадку, коли залучається велика кількість експертів і є максимально точна початкова інформація про лінгвістичні терми.

В нашій роботі при побудові функцій належності ми застосуємо трапецієвидну форму представлення ФН, оскільки представлення як вхідних даних, так і вихідних змінних є в певних діапазонах чисел.

У теорії нечітких множин використовують декілька різних форм функції належності. Методи їх побудови можна поділити на дві групи: прямі і непрямі. До прямих належать методи, де ступені належності визначаються безпосередньо експертами. У випадку залучення групи експертів виробляється інтегрована оцінка.

У такому випадку функція належності (ФН) буде мати достовірніший вигляд, але вона повинна бути нормалізована. Такі методи використовують, в основному, коли випадкові помилки у початковій експертній інформації незначні або мало ймовірні. Без вагових коефіцієнтів прямі методи застосовуються лише тоді, коли одночасно будується функція належності всіх термів з терм-множини X лінгвістичної змінної x , або, принаймні, ці значення відомі експертам.

Для зниження суб'єктивізму експертів застосовуються непрямі методи, їх використання рекомендується при залученні великої кількості експертів, а також, коли експертна інформація нерівномірно відображає терм-множину. Також ці методи використовують при наявності невимірюваних параметрів оціночного, неявного характеру. Характерним представником цієї групи методів є метод парних порівнянь Сааті. В нашій роботі ми будемо функції належності будувати за алгоритмом Мамдані у середовищі Matlab.(Додаток А)

Основні вимоги до вигляду ФН, що впливають з її змісту, є такими:

1. Оскільки як вхідні параметри задаються діапазоном змін, так і вихідні зміни будуть задаватись не одним числом, а діапазоном чисел, то в нашій роботі ми використаємо трапецієвидну форму представлення ФН.
2. У діапазоні зміни X аргументу x ФН не може бути відрізків, яким не відповідає жодне поняття множини T .
3. Кожне поняття множини T повинно мати типового представника, тобто для кожного T_i існує $\mu_{T_i}(x) = 1$.
4. Область визначення X містить скінчену кількість точок.

Побудова функцій належності змінних, що використовуються в моделях, здійснювалась методом експертних оцінок з можливим використанням вагових коефіцієнтів. Формування термів та подальше їх зіставлення з найбільш характерним діапазоном, що покривається цим термом, здійснювалось до відповідних існуючих методик [52].

Ідентифікація нелінійних залежностей, тобто побудова їх моделей за результатами спостережень, є важливим завданням. Роботи по нечіткій ідентифікації нелінійних залежностей інтенсивно проводяться за кордоном з 1990-х років. Виділимо роботи професора Ротштейна, в яких розроблений метод двохетапної ідентифікації нелінійних залежностей за допомогою нечітких баз знань.

На першому етапі виконується структурна ідентифікація. Вона є формуванням нечіткої бази знань, яка грубо відображає нелінійний взаємозв'язок «входи - вихід» за допомогою лінгвістичних правил <якщо-то>. Ці правила генеруються експертом або отримують в результаті екстракції нечітких знань з експериментальних даних. На другому етапі відбувається параметрична ідентифікація досліджуваної залежності шляхом знаходження таких параметрів нечіткої бази знань, які мінімізують відхилення результатів нечіткого моделювання від експериментальних даних. Параметрами, що настраюються, є ваги правил і параметри функцій приналежності нечітких термів.

Передбачається, що модель залежності $y=f(X)$ задана нечіткою базою знань. Вважатимемо, що існує також навчальна вибірка з M пар експериментальних даних, що зв'язують входи $X_r = (x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rm})$ з виходом у досліджуваної залежності:

$$(X_r, y_r), \quad r = \overline{1, M}$$

де $X_r = (x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rm})$ – вхідний вектор в r -й парі навчальної вибірки і y_r – відповідний вихід.

Введемо наступні позначення:

- P – вектор параметрів функцій приналежності термів вхідних і вихідної змінних;
- W – вектор вагових коефіцієнтів правил бази знань;
- $F(P, W, X_r)$ – результат виведення по нечіткій базі знань Мамдані з параметрами (P, W) при значенні входів X_r .

Згідно з методом найменших квадратів, настройка нечіткої бази знань Мамдані зводиться до наступної задачі математичного програмування: знайти такий вектор (P, W) , щоб

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{r=1, M} (y_r - F(P, W, X_r))^2} \rightarrow \min. \quad (6.12)$$

У цій задачі оптимізації на керовані змінні P зазвичай накладають обмеження, що забезпечують лінійну впорядкованість елементів терм-множин. Такі обмеження не дозволяють алгоритмам оптимізації зробити, наприклад, нечітку множину «низький» більше «високого». Крім того, ядра нечітких множин не повинні виходити за межі діапазонів зміни відповідних змінних. Такими обмеженнями забезпечується прозорість нечіткої бази знань після настройки, тобто можливість

змістовної інтерпретації правил. Що стосується вектора W , то його координати повинні знаходитися в діапазоні $[0,1]$. Якщо до рівня інтерпретабельності бази знань пред'являються високі вимоги, то ваги правил не настроюють, залишаючи їх рівними 1. Можливий і проміжний варіант, коли вагові коефіцієнти можуть набувати значень 0 або 1. В цьому випадку нульове значення вагового коефіцієнта еквівалентне виключенню правила з нечіткої бази знань.

У нашій конкретній моделі нечіткої бази знань моделі формуються за допомогою векторів, комплектами яких є відповідні значення вхідних і вихідних змінних. Вигляд l -го вектора буде таким:

$$R_{l_s} = (x_{l_s 1}, x_{l_s 2}, \dots, x_{l_s m}, y_{l_s 1}, y_{l_s 2}, \dots, y_{l_s n}),$$

де $S=1,2,3,\dots$ – номер правила;

$x_{l_s 1}, x_{l_s 2}, \dots, x_{l_s m}$ – значення вхідних змінних;

У нашому випадку $K=l_1+l_2+\dots+l_s$ де l_1, l_2, \dots, l_s – відповідні кількості векторів R_l з однаковими значеннями вихідної змінної. Кількість векторів R_l є значно меншою від кількості варіантів повного набору значень вхідних і вихідних змінних.

Базу знань моделі представимо у вигляді табл. 3.3 з такими характеристиками:

1. Кількість стовбців $m+n$, кількість рядків $-l_s, s=1,2,\dots,S$.
2. Перші m стовпців відповідають значенням вхідних змінних, наступних n стовпців відповідають значенням вихідних змінних.
3. Кожний рядок таблиці є деякою комбінацією значень вхідних змінних, що віднесені експертом до одного з можливих варіантів значень вихідних змінних.
4. Елемент $x_{l_s i}$ відповідає лінгвістичній оцінці параметра x_i , яку вибрано з терм-множин $A_i (i=1,2,\dots,n)$.

Кожний рядок таблиці називається нечітким правилом. Передбачається налагодження моделі за допомогою конкретної форми функцій належності через знаходження значень ваги правил, якому відповідатиме характеристика суб'єктивної міри («ваги») впевненості експерта у цьому правилі. Всі вони спочатку прирівнюються до одиниці.

Таблиця 6.1

База знань моделі

№ l_s	Вхідні змінні						Вихідні змінні						Ва ги
	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$...	$x^{(i)}$...	$x^{(m)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$...	$y^{(i)}$...	$y^{(n)}$	ω
l_1	$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$...	$x_1^{(i)}$...	$x_1^{(m)}$	$y_1^{(1)}$	$y_1^{(2)}$...	$y_1^{(i)}$...	$y_1^{(n)}$	ω_1
l_2	$x_2^{(1)}$	$x_2^{(2)}$...	$x_2^{(i)}$...	$x_2^{(m)}$	$y_2^{(1)}$	$y_2^{(2)}$...	$y_2^{(i)}$...	$y_2^{(n)}$	ω_2
l_3	$x_3^{(1)}$	$x_3^{(2)}$		$x_3^{(i)}$		$x_3^{(m)}$	$y_3^{(1)}$	$y_3^{(3)}$...	$y_3^{(i)}$...	$y_3^{(n)}$	ω_3
l_s	$x_{ls}^{(1)}$	$x_{ls}^{(2)}$		$x_{ls}^{(i)}$		$x_{ls}^{(m)}$	$y_{ls}^{(1)}$	$y_{ls}^{(2)}$...	$y_{ls}^{(i)}$...	$y_{ls}^{(n)}$	ω_{ls}
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
l_s	$x_{ls}^{(1)}$	$x_{ls}^{(2)}$		$x_{ls}^{(3)}$		$x_{ls}^{(m)}$	$y_{ls}^{(1)}$	$y_{ls}^{(2)}$...	$y_{ls}^{(3)}$		$y_{ls}^{(n)}$	ω_{ls}

Кожний рядок таблиці будемо називати нечітким правилом [25]. Оскільки передбачається налагодження моделі за допомогою конкретної форми функцій належності через знаходження ваги правил, то кожному правилу бази знань відповідатиме характеристика суб'єктивної міри («ваги») впевненості експерта у цьому правилі [25]. Спочатку всі ваги прирівнюються до одиниці.

Перевіряється база знань на наявність протилежних за змістом рядків, тобто правил, що при однакових вхідних змінних мають різні вихідні змінні. Такі протиріччя повинні бути усунені. Повністю база знань оцінки ефективності реалізації інвестиційних проектів в галузі зв'язку по регіонах України подано в додатку Б.

База знань представлена у вигляді висловлювань типу «якщо-то». Правила, що мають однаковий вихідний параметр, між собою поєднуються у рівняння висловом «або». Лінгвістичне висловлення формується у бази знань моделі прогнозування ефективності вибору таким чином.

Для реалізації чіткого логічного висновку необхідно здійснювати перехід від

висловлювань до нечітких логічних рівнянь. Ці рівняння отримують через заміну значень x_{ij} на значення їх функцій належності $\mu_{x_{ij}}(x_i)$ параметра $x_i \in \underline{x}_i, x_i$ нечіткому терму x_{ij} «або» нечітко-логічним операціям «.», « \vee ». Вага правил враховується через добуток нечіткого виразу, який відповідає кожному рядку бази і відповідного значення ваги ω_1 .

Так, лінгвістичним висловлюванням бази знань відповідають такі нечіткі логічні рівняння:

$$\mu^{\gamma_1}(y_1, y_2, y_3 \dots y_6) = \omega_1 [\mu^B(y_1) \cdot \mu^B(y_2) \cdot \mu^B(y_3) \cdot \mu^B(y_4) \cdot \mu^B(y_5) \cdot \mu^B(y_6)] \vee$$

$$\omega_2 [\mu^{BC}(y_1) \cdot \mu^B(y_2) \cdot \mu^B(y_3) \cdot \mu^B(y_4) \cdot \mu^B(y_5) \cdot \mu^B(y_6)] \vee$$

$$\omega_3 [\mu^{BC}(y_1) \cdot \mu^{BC}(y_2) \cdot \mu^B(y_3) \cdot \mu^B(y_4) \cdot \mu^B(y_5) \cdot \mu^B(y_6)]$$

$$\mu^{\gamma_2}(y_1, y_2, y_3 \dots y_6) = \omega_4 [\mu^B(y_1) \cdot \mu^{BC}(y_2) \cdot \mu^B(y_3) \cdot \mu^B(y_4) \cdot \mu^{BC}(y_5) \cdot \mu^{BC}(y_6)] \vee$$

$$\omega_5 [\mu^{BC}(y_1) \cdot \mu^B(y_2) \cdot \mu^B(y_3) \cdot \mu^B(y_4) \cdot \mu^{BC}(y_5) \cdot \mu^{BC}(y_6)] \vee$$

$$\omega_6 [\mu^B(y_1) \cdot \mu^{BC}(y_2) \cdot \mu^{BC}(y_3) \cdot \mu^{BC}(y_4) \cdot \mu^{BC}(y_5) \cdot \mu^{BC}(y_6)]$$

$$\mu^{\gamma_3}(y_1, y_2, y_3 \dots y_6) = \omega_7 [\mu^C(y_1) \cdot \mu^{BC}(y_2) \cdot \mu^C(y_3) \cdot \mu^C(y_4) \cdot \mu^{BC}(y_5) \cdot \mu^C(y_6)] \vee$$

$$\omega_8 [\mu^{BC}(y_1) \cdot \mu^{BC}(y_2) \cdot \mu^C(y_3) \cdot \mu^C(y_4) \cdot \mu^C(y_5) \cdot \mu^{BC}(y_6)] \vee$$

$$\omega_9 [\mu^C(y_1) \cdot \mu^C(y_2) \cdot \mu^C(y_3) \cdot \mu^B(y_4) \cdot \mu^C(y_5) \cdot \mu^C(y_6)]$$

$$\mu^{\gamma_4}(y_1, y_2, y_3 \dots y_6) = \omega_{10} [\mu^{HC}(y_1) \cdot \mu^{HC}(y_2) \cdot \mu^C(y_3) \cdot \mu^C(y_4) \cdot \mu^C(y_5) \cdot \mu^{HC}(y_6)] \vee$$

$$\omega_{11} [\mu^C(y_1) \cdot \mu^{HC}(y_2) \cdot \mu^{(C)}(y_3) \cdot \mu^{HC}(y_4) \cdot \mu^{HC}(y_5) \cdot \mu^{HC}(y_6)] \vee$$

$$\omega_{12} [\mu^C(y_1) \cdot \mu^{HC}(y_2) \cdot \mu^C(y_3) \cdot \mu^{HC}(y_4) \cdot \mu^{HC}(y_5) \cdot \mu^{HC}(y_6)]$$

$$\mu^{\gamma_5}(y_1, y_2, y_3 \dots y_6) = \omega_{13} [\mu^H(y_1) \cdot \mu^C(y_2) \cdot \mu^C(y_3) \cdot \mu^{HC}(y_4) \cdot \mu^{HC}(y_5) \cdot \mu^H(y_6)] \vee$$

$$\omega_{14} [\mu^{HC}(y_1) \cdot \mu^{HC}(y_2) \cdot \mu^H(y_3) \cdot \mu^{HC}(y_4) \cdot \mu^{HC}(y_5) \cdot \mu^H(y_6)] \vee$$

$$\omega_{15} [\mu^H(y_1) \cdot \mu^{(H)}(y_2) \cdot \mu^H(y_3) \cdot \mu^H(y_4) \cdot \mu^H(y_5) \cdot \mu^H(y_6)]$$

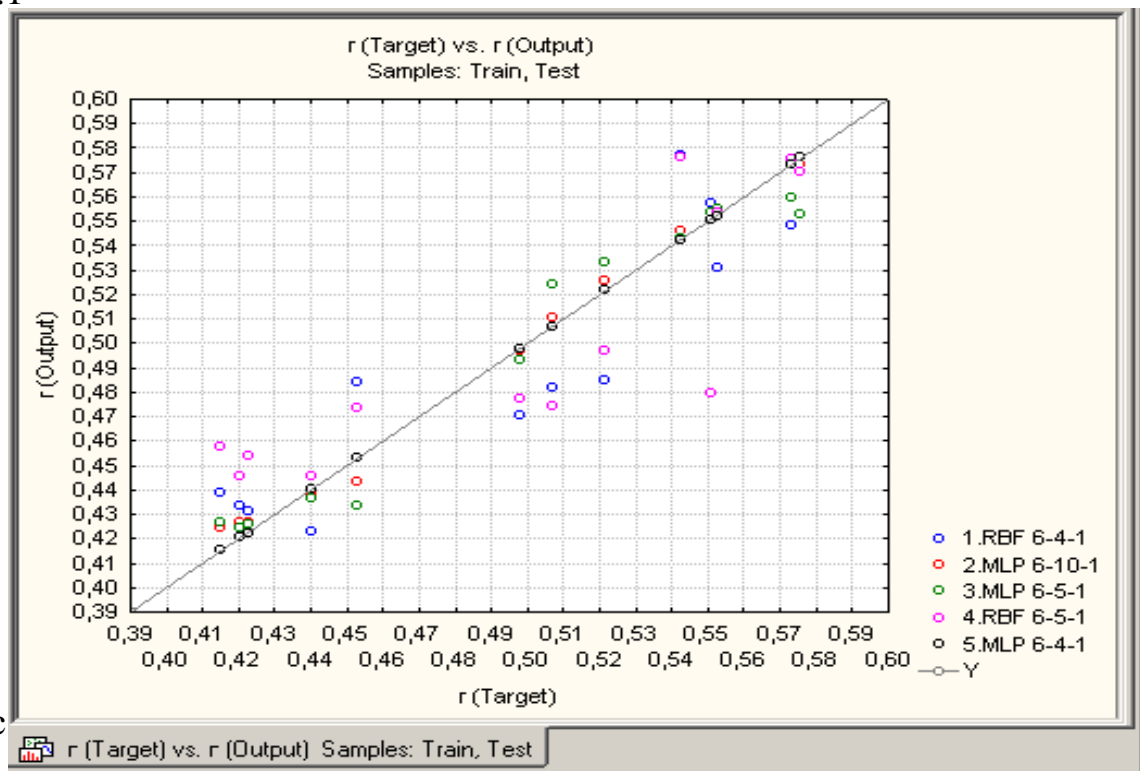
Тоді логічні рівняння бази знань 1.1 для змінної y_1 будуть:

$$y_1 = H$$

$$\begin{aligned} \mu^H(y_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})) = & \omega_{16} [\mu^H(x_1) \cdot \mu^H(x_2) \cdot \mu^H(x_3) \cdot \mu^H(x_4) \cdot \mu^H(x_5) \cdot \\ & \mu^H(x_6) \cdot \mu^{KC}(x_7) \cdot \mu^H(x_8) \cdot \mu^H(x_9) \cdot \mu^H(x_{10})] \vee \omega_{17} [\mu^H(x_1) \cdot \mu^H(x_2) \cdot \mu^C(x_3) \cdot \mu^B(x_4) \cdot \mu^C(x_5) \cdot \\ & \mu^H(x_6) \cdot \mu^H(x_7) \cdot \mu^H(x_8) \cdot \mu^H(x_9) \cdot \mu^H(x_{10})] \vee \omega_{18} [\mu^H(x_1) \cdot \mu^H(x_2) \cdot \mu^C(x_3) \cdot \mu^C(x_4) \cdot \mu^H(x_5) \cdot \\ & \mu^{HC}(x_6) \cdot \mu^{CC}(x_7) \cdot \mu^C(x_8) \cdot \mu^H(x_9) \cdot \mu^H(x_{10})] \vee \omega_{19} [\mu^B(x_1) \cdot \mu^H(x_2) \cdot \mu^H(x_3) \cdot \mu^C(x_4) \cdot \mu^H(x_5) \cdot \\ & \mu^{BC}(x_6) \cdot \mu^H(x_7) \cdot \mu^C(x_8) \cdot \mu^C(x_9) \cdot \mu^H(x_{10})] \vee \omega_{20} [\mu^B(x_1) \cdot \mu^H(x_2) \cdot \mu^H(x_3) \cdot \mu^H(x_4) \cdot \mu^H(x_5) \cdot \\ & \mu^{BC}(x_6) \cdot \mu^H(x_7) \cdot \mu^C(x_8) \cdot \mu^C(x_9) \cdot \mu^H(x_{10})] \vee \omega_{21} [\mu^B(x_1) \cdot \mu^H(x_2) \cdot \mu^H(x_3) \cdot \mu^H(x_4) \cdot \mu^C(x_5) \cdot \\ & \mu^{BC}(x_6) \cdot \mu^H(x_7) \cdot \mu^C(x_8) \cdot \mu^C(x_9) \cdot \mu^C(x_{10})] \vee \omega_{22} [\mu^B(x_1) \cdot \mu^H(x_2) \cdot \mu^H(x_3) \cdot \mu^H(x_4) \cdot \mu^{HC}(x_5) \cdot \\ & \mu^{BC}(x_6) \cdot \mu^H(x_7) \cdot \mu^H(x_8) \cdot \mu^C(x_9) \cdot \mu^C(x_{10})]. \end{aligned}$$

Приклад представлення розрахунків з використанням програмного забезпечення нового покоління нейромереж (Statistika8.0) представлено нижче:

Графічне представлення спостережуваних і прогнозованих значень для цільової змінної інтегрального показника ефективності реалізації інвестиційних проектів впровадження обладнання зв'язку по регіонах України представлено на рис. 6.1



Рис

зації

інвестиційних проектів у галузі зв'язку.

Застосування нейромереж у моделюванні економічних процесів та об'єктів є перспективним напрямком дослідження в сучасній економіці.

Список використаних джерел.

1. Аакер Д. Маркетинговые исследования / Д. Аакер, В. Кумар, Дж. Дей ; пер. с англ. А. Шалек, С. Божук. – СПб: Питер, 2004. – 848 с. – ISBN 5–314–00044–X.
2. Абдеев Р. Ф. Философия информационной цивилизации / Р. Ф. Абдеев. – М. : ВЛАДОС, 1994. – 336 с. – ISBN 5–87065–012–7.
3. Авен П. О. Функциональное шкалирование / П. О. Авен, И. Б. Мучник, А. А. Ослон ; [отв. ред. д. ф.–м. н. Б. А. Березовский]. – М. : Наука, 1988. – 177 с. – ISBN 5–02–006597–8.
4. Адлер Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – М : Наука, 1976. – 139 с.
5. Айвазян С. А. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное издание / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 472 с.
6. Айвазян С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник для вузов / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М. : ЮНИТИ, 1998.–1022 с. – ISBN 5–238–00013–8
7. Акофф. Искусство решения проблем / Р. Акофф ; пер. с англ Е. Г. Коваленко ; под ред. канд. техн. наук Е. К. Масловского. – М. : Мир, 1982. – 224 с., ил
8. Алехин А. Б. Моделирование предприятия в задачах оптимальной синхронизации производства и инновационной деятельности и их финансирования / А. Б. Алехин, И. Ю. Ивченко // Вісник Хмельницького університету. Т. 1. Економічні науки. – 2008. – № 4. – С. 18–22.
9. Алтунин, А. Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: монография / А. Е. Алтунин, М. В. Семухин. – Тюмень : ТГУ, 2000. – 352 с.
10. Андреев В.Л. Статистические методы классификационных построений в биогеографии и систематике / В. Л. Андреев // Иерархические классификационные построения в географической экологии и систематике. – Владивосток : ДВНЦ АН СССР, 1979. – С. 60–96.
11. Ансофф И. Стратегическое управление / И. Ансофф ; пер. с англ. – М. : Экономика, 1989. – 358 с.
12. Аптон Г. Анализ таблиц сопряженности / Г. Аптон ; пер. с англ. и предисл. Ю. П. Адлера. – М. : Финансы и статистика, 1982. – 143 с. : ил.
13. Аренков И. А. Бенчмаркинг и маркетинговые решения : монография / И. А. Аренков, Е. Г. Багиев.– СПб. : СПбУЭФ, 2007. – 218 с.
14. Арутюнова Д. В. Стратегический менеджмент: учеб. пособие [Электронный ресурс] / Д. В. Арутюнова. – Режим доступа: <http://www.aup.ru/books/m205/>
15. Асаул А. Н. Модернизация экономики на основе технологических инноваций / А. Н. Асаул [и др.]. – СПб:АНО ИПЭВ, 2008. – 606 с. – ISBN 978–5–91460–019–5.
16. Асаул А. Н. Теория и практика принятия решений по выходу организаций из кризиса / А. Н.

- Асаул, И. П. Князь, Ю. В. Коротаева ; под ред. А. Н. Асаула. – СПб. : АНО «ИПЭВ», 2007. – 224 с.
17. Асаул А. Н. Корпоративные структуры в региональном инвестиционно-строительном комплексе / А. Н. Асаул, А. В. Батрак. – М. : АСВ. СПб. : СПбГАСУ, 2001. – 168 с.
18. Афанасьев В. Г. Человек в управлении обществом / В. Г. Афанасьев. – М. : Политиздат, 1977. – 382 с.
19. Ашмарин И. П. Быстрые методы статистической обработки и планирование экспериментов / И. П. Ашмарин, Н. Н. Васильев, В. А. Амбросов. – 2-е изд., испр. – Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1975. – 78 с. : ил.
20. Багиев Г. Л. Маркетинг: учебник для вузов / Г. Л. Багиев, В. М. Тарасевич, Х. Анн; под общ. ред. Г. Л. Багиева. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЗАО «Изд-во Экономика» , 2001. – 718 с. – ISBN 5–282–02101–3.
21. Баззел Р. Информация и риск в маркетинге: пер.с англ. / Р. Д. Баззел, Д. Ф. Кокс, Р. В. Браун. – М. : Финстатинформ, 1993. – 96 с. – Загл. на доп. тит. листе : Marketing research and information systems. – ISBN 5–7166–0021–2 (в мягком пер.).
22. Балабанова Л. В. Маркетинг. Конспект лекцій з дисципліни для студентів обліково–фінансового факультету / Укладачі: Балабанова Л. В., Коломицева С. І. – Донецьк : ДонДУЕТ, 2004. – 191 с.
23. Батороев К. Б. Аналогии и модели в познании / К. Б.Батороев. – Новосибирск : Наука, 1981. – 320 с.
24. Башкатова Ю. И. Управленческие решения / Ю. И. Башкатова. – М. : ММИЭИФП, 2003. – 89 с.
25. Безгін К. С. Методичний підхід до прийняття рішень стосовно реінжинірингу процесу створення цінності на підприємстві / К. С. Безгін // Вісник Донецького національного університету. – 2010. – № 1. – С. 208–212.
26. Безрукова Т. Л. Управление конкурентоспособностью предпринимательской организации : монография / Т. Л. Безрукова, Е. И. Сапронов, С. С. Морковіна. – М. : Изд-во «КноРус», 2008. – 163 с.
27. Беллман Р. Динамическое программирование и современная теория управления / Р. Беллман, Р. Калаба ; пер. с англ. Е. Я. Ройтенберга ; под. ред. В. С. Разумихина. – М. : Наука, 1969. – 119 с.
28. Беллман Р. Принятие решений в расплывчатых условиях / Р. Беллман, Л. А. Заде // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М. : Мир, 1976. – С. 172–215.
29. Беляевский И. К. Маркетинговые исследования / И. К. Белявский.– М. : Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права, 2002. – 175 с.
30. Березин И. С. Маркетинговые исследования. Как это делают в России / И. С. Березин. – М. : Вершина, 2005. – 427 с. – ISBN 5–9626–0074–6.
31. Бизнес. Толковый словарь [Электронный ресурс] / [Грэхэм Бетс, Барри Брайндли, С. Уильямс и др.]. – Режим доступа: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/business/16200>

32. Бир Ст. Кибернетика и управление производством / Ст. Бир. – М. : Наука, 1965. – 392 с.
33. Білик І. А. Розвиток маркетингу в умовах інтеграції та глобалізації / І. А. Білик, Н. А. Хрущ // Вісник Хмельницького національного університету. – 2010. – №5. – С. 177–181. (Серія «Економічні науки», т. 4).
34. Благун І. С. Системи розвитку економіко–виробничих структур / І. С. Благун . – Івано–Франківськ, 1997. – 146 с. – ISBN 5–7763–1680–4.
35. Борисов А. Н. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования / А. Н. Борисов, О. А. Крумберг, И. П. Федоров. – Рига. : Знание, 1990. – 184 с. – ISBN 5–7966–0459–7.
36. Борисов А. Б. Большой экономический словарь. Изд. 2–е перераб. и доп. / Борисов А. Б. – М. : Книжный мир, 2004. – 860 с.
37. Бородкин Ф. М. Социальные индикаторы : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности «Статистика» и другим экономическим специальностям / Ф. М. Бородкин, С. А. Айвазян. – М. : ЮНИТИ–ДАНА, 2006. – 607 с. – ISBN 5–238–01094–X.
38. Браверман Э. М. Структурные методы обработки эмпирических данных / Э. М. Браверман, И. Б. Мучник. – М. : Наука. Главная редакция физ.–мат. литературы, 1983. – 464 с.
39. Буреш О. В. Концепция маркетингового информационного пространства как источник маркетингового обеспечения принятия управленческих решений / О. В. Буреш, О. М. Калиева // Весник ОГУ. – 2010. – №9 (115). – С. 88–93. – ISSN 1814–6457.
40. Бурляева О. В. Информационные средства обеспечения принятия управленческих решений / О. В. Бурляева, В. В. Ибрагимов, А. В. Ленард // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2007. – т. 17. – № 3. – С. 9–20. – ISSN 0236–1493.
41. Бушуева Л. И. Теоретико-методологические подходы к изучению информационного обеспечения управленческих решений / Л. И. Бушуева // Российское предпринимательство. – 2008. – № 1. – Вып. 1 (104). – с. 92–97.
42. Бушуева Л. И. Методология статистического исследования информационного обеспечения маркетинговой деятельности : дис... доктора экономических наук : 08.00.12 / Бушуева Людмила Игоревна. – Оренбург, 2009. – 407 с.
43. Быстрянец С. Б. Методология и теория в социологическом исследовании [монография] / С. Б. Быстрянец. – СПб. : Изд–во СПбГУЭФ, 2010. – 152 с. – ISBN 978–5–7310–2556–0.
44. Вартофский М. Модели. Репрезентация и научное понимание /М. Вартофский ; пер. с англ. – М. : Прогресс, 1988. – 508 с.
45. Василенко В. А. Ситуационный менеджмент: учеб. пособие / В. А. Василенко, В. И. Шостка. – К. : ЦУЛ, 2003, 356 с.
46. Василенко И. А. Административно-государственное управление в странах Запада: США, Великобритания, Франция, Германия : [учеб. пособие] / И. А. Василенко. – М. : Логос, 2001. – 200 с.
47. Васильев Г. А. Маркетинг / Г. А. Васильев. – М. : ЮНИТИ–ДАНА, 2002. – 208 с.

48. Василькова В. В. Синергетика: новая научная методология и новое мировидение / В. В. Василькова // *Философия познания: учебник для магистров и аспирантов* / Под общ. и науч. ред. В. Л. Обухова, Ю. Н. Солонина, В. П. Сальникова, В. В. Васильковой. – СПб. : Фонд поддержки науки и образования в области правоохранительной деятельности «Университет», 2003. – С.156 – 170. – ISBN 5–93598–086–Х.
49. Величко С. В. Принятие решений: анализ процессов, представление информации. Часть I [Электронный ресурс] / С. В. Величко, Н. Е. Сергеев. – Режим доступа: <http://uvc.tti.sfedu.ru>.
50. Винер Н. Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине / Н. Винер; пер. с англ. И. В. Соловьева и Г. Н. Поварова ; под ред. Г. Н. Поварова. – 2-е изд. – М. : Наука; Главная редакция изданий для зарубежных стран, 1983. – 344 с.
51. Виноградський М. Д. Організація праці менеджера : навч. посібн. [для студ. екон. ВНЗів] / М. Д. Виноградський, А. М. Виноградська, О. М. Шканова. – К. : Вид-во "Кондор", 2003. – 414 с.
52. Виссема Х. Менеджмент в подразделениях фирмы: предпринимательство и координация в децентрализованной компании / Х. Виссема ; пер. с англ. Н. А. Нуреева; под ред. Ю. Джаровой, Р. М. Нуреева. – М. : ИНФРА-М, 1996. – 287 с.
53. Вітлінський В. В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: навч.-метод. посібн. для самост. вивч. дисц. / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко. – К. : КНЕУ, 2000. – 292 с. – ISBN 966–574–019–9.
54. Вітлінський В. В. Прийняття раціональних маркетингових рішень з урахуванням ризику / В. В. Вітлінський, І. Ф. Шатарська // VI Міжнародна школа симпозиум «Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем» (АМУР–2012). – Сб.научн.трудов. – Севастополь, 2012. – С.93–97
55. Вітлінський В. В. Урахування об'єктивно–суб'єктивної структури ризику в моделюванні економічних систем / В. В. Вітлінський // *Моделювання та інформаційні системи в економіці* : Зб. наук. праць. – К. : КНЕУ. – 2010. – Вип. 81. – С. 12–22.
56. Вітлінський В. В. Штучний інтелект у системі прийняття рішень / В. В. Вітлінський // *Нейронечіткі технології моделювання в економіці*. – 2012. – № 1. – С. 97–118.
57. Вітлінський В. В. Зміна парадигми в сучасній теорії економіко-математичного моделювання / В. В. Вітлінський, А. В. Матвійчук // *Економіка України*. – 2007. – №11. – С. 35–43.
58. Власенко В. А. Теоретико-методичні основи формування механізму управління розвитком системи споживчої кооперації України / В. А. Власенко // *Вісник ХНЕУ*. – 2008. – Вип. 2 (107). – С. 179–185. (Серія: «Економічні науки», т. 2)..
59. Вовк В. М. Математичні методи дослідження операцій в економіко–виробничих системах : монографія / В. М. Вовк. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2006. – 622 с.
60. Войнаренко М. П. Проблемы автоматизации функционально-стоимостного анализа / М. П. Войнаренко, А. М. Холоденко ; отв. ред. В. М. Геец. – К. : Наукова думка, 1994. – 234 с.
61. Войнаренко М. П. Формування та оцінка механізму управління ризиками інноваційної

- діяльності промислових підприємств / М. П. Войнаренко, Р. В. Скалюк // Вісник Хмельницького національного університету. – 2008. – №5. – С. 135–139. (Серія «Економічні науки», т.2).
62. Волкова Л. Методы и модели сегментирования рынка [Електронний ресурс] / Л. Волкова. – Режим доступу: http://m-arket.narod.ru/S_OM/segment_model.html
63. Волкова Л. Стратегический анализ [Електронний ресурс] / Л. Волкова. – Режим доступу: <http://m-arket.narod.ru/StrAn.html> .
64. Гайдышев И. Анализ и обработка данных : специальный справочник / И. Гайдышев. – СПб : Питер, 2001. – 752 с.
65. Гевко І. Б. Методи прийняття управлінських рішень : підручник. / І. Б. Гевко. – К. : Кондор, 2009. – 187 с.
66. Герасимов Н. Г. Структура научного исследования : философский анализ познавательной деятельности в науке / Н. Г. Герасимов. – М. : Мысль, 1985. – 217 с.
67. Герчикова И. Н. Процесс принятия и реализации управленческих решений / И. Н. Герчикова // Менеджмент в России и за рубежом. – 2003. – № 12. – С. 39–42
68. Глас Дж. Статистические методы в педагогике и психологии / Дж. Глас, Дж. Стенли ; пер. с англ. Ю. П. Адлер, А. Н. Ковалёв. – М. : Прогресс, 1976. – 493 с.
69. Глушков В. М. Кибернетика. Вопросы теории и практики / В. М. Глушков. – М. : Наука, 1986. – 488 с. (Наука. Мировоззрение. Жизнь).
70. Гожій О. Дослідження невизначеностей в задачах сценарного планування / О. Гожій // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – 2011. – №710. – С. 60–64. (Серія «Комп'ютерні науки та інформаційні технології»). – ISSN 0321-0499.
71. Голубков Е. П. Маркетинговые исследования: теория, методология и практика / Е. П. Голубков. – М. : Финпресс, 1998. – 416 с. – ISBN 5-08001-0003-9.
72. Готт В. С. Определенность и неопределенность как категории научного познания / В. С. Готт, А. Д. Урсул // Новое в жизни, науке, технике. Сер. : Философия. М. : Знание, 1971. – Вып. 7. – 64 с.
73. Грэнхауд К. Социологические основы маркетинга / К. Грэнхауд // Маркетинг / Под. ред. М. Бейкера. – СПб. : Питер, 2002. – С. 68 – 80. – (Серия «Бизнес–класс»). – ISBN 5-318-00124-6.
74. Григорук П. М. Аналіз даних маркетингових досліджень : монографія / П. М. Григорук. – К. : Кафедра, 2012. – 428 с. – ISBN 978-96-2705-16-4.
75. Григорук П. М. Інформаційна модель процесу прийняття рішення / П. М. Григорук, С. С. Григорук // Актуальні проблеми економічної кібернетики : колективна наукова монографія / за ред. О. Ю. Чубукової, Л. І. Антошкіної, Н. В. Геселевої. – К. : ВД «Стилос», 2012. – С. 154–171. – ISBN 978-966-193-063-5.
76. Григорук П. М. Міри відстані та подібності в опрацюванні даних маркетингових досліджень / П. М. Григорук // Маркетингові технології в умовах інноваційного розвитку економіки : [монографія] / [за ред. С. В. Ковальчук]. – Хмельницький : ТОВ «Поліграфіст-2», 2011. – С. 185–194. – ISBN 978-966-1502-36-8.